

Scuola Nazionale Dottorandi di Elettrotecnica "Ferdinando Gasparini"

Napoli, 16-20 Ottobre 2006

Reti non lineari: una rilettura dei fondamenti

Prof. Mauro PARODI – Università di Genova

*Indirizzo: Dipartimento di Ingegneria Biofisica ed Elettronica (DIBE) - Via Opera Pia 11A 16145
Genova*

e-mail: mauro.parodi@unige.it

Avvertenze

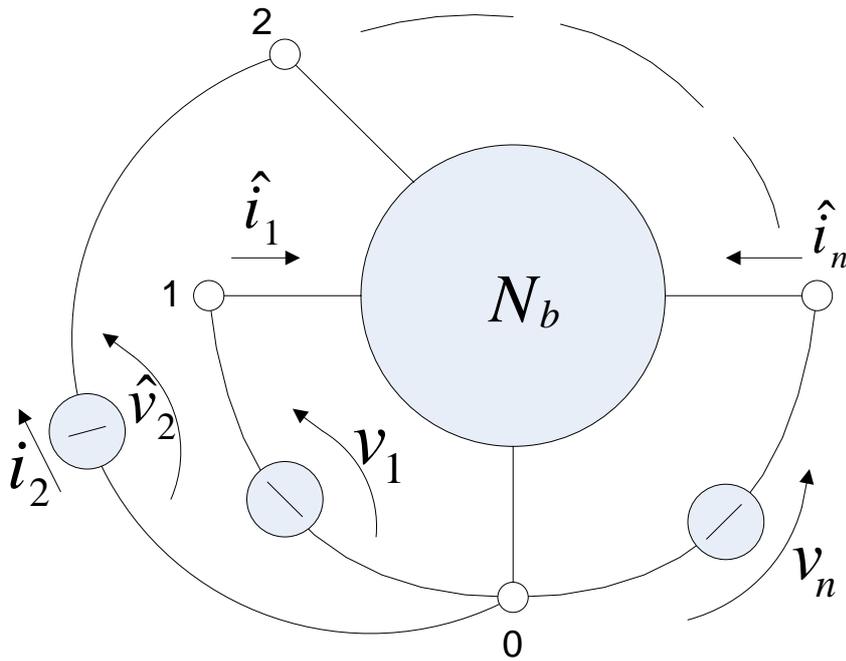
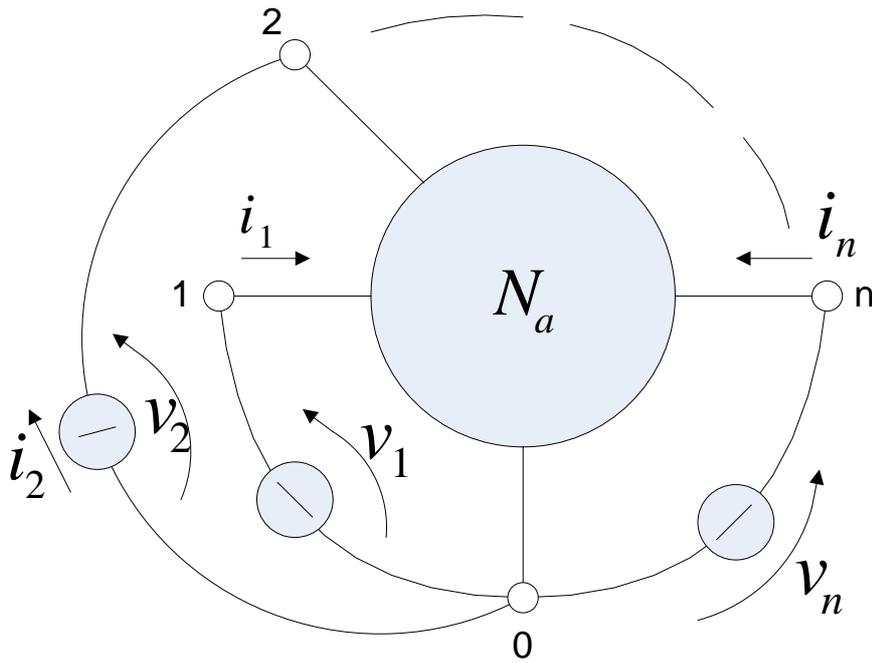
Una parte consistente degli argomenti qui trattati proviene dal "tutorial" di L.O. Chua: "Device modeling via basic nonlinear circuit elements" (IEEE Trans. On Circuits and Systems, 1980). Chi desidera approfondire può trovare nella lettura di questo articolo spunti e riferimenti assai validi.

Le pagine qui raccolte fanno parte del materiale didattico impiegato per le lezioni del corso "Circuiti non lineari", che tenni per vari anni nell'ambito del Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica all'Università di Genova. Il loro scopo è esclusivamente quello di agevolare l'ascolto delle lezioni.

Napoli, 16-20 Ottobre 2006

Mauro Parodi

Teorema di rappresentazione per i sistemi lineari



v_1, i_2, \dots, v_n generatori sinusoidali arbitrari
 N_a, N_b lineari

Risposte: $i_1(t), v_2(t), \dots, i_n(t)$ N_a

$\hat{i}_1(t), \hat{v}_2(t), \dots, \hat{i}_n(t)$ N_b

Se le risposte sono **uguali** (transitorio e stato stazionario), ovvero se:

$$i_1(t) \equiv \hat{i}_1(t), v_2(t) \equiv \hat{v}_2(t), \dots, i_n(t) \equiv \hat{i}_n(t) \Rightarrow N_a, N_b \text{ sono } \mathbf{identici}.$$

Enunciato del teorema di rappresentazione:

<Siano N_a e N_b due sistemi lineari a $(n+1)$ terminali. Sia N_a sia N_b siano collegate a n generatori sinusoidali arbitrari di ampiezza non nulla, e i generatori connessi ai terminali corrispondenti in N_a e N_b siano identici. Se le risposte complete (transitorio e stato stazionario) dei terminali corrispondenti di N_a e N_b sono identiche, allora N_a e N_b sono equivalenti l'un l'altro nel senso che avranno identiche risposte se soggette a qualunque altro sistema di ingressi corrispondenti>.

Il teorema di rappresentazione per i sistemi lineari permette, ad esempio, di stabilire l'equivalenza di modelli incrementali lineari confrontando la risposta del modello con quella dell'oggetto (dispositivo) da rappresentare per uno stesso insieme di eccitazioni sinusoidali.

Secondo lo stesso criterio, in particolare, due bipoli con la stessa $Z(s)$ ma differente struttura (es. sintetizzati con diversi procedimenti) sono equivalenti per qualunque $i(t)$ assegnata ai terminali.

Per i sistemi non lineari non esiste nulla di simile.

I soli modelli non lineari dei quali si può pensare di accertare la validità sono quelli "in continua", perchè non coinvolgono induttori e condensatori. In questo caso si confrontano le curve caratteristiche del modello con quelle misurate nelle stesse condizioni.

In mancanza di un procedimento generale per la costruzione di modelli non lineari, si fa frequente riferimento a due metodi:

physical approach

black-box approach

Nel cosiddetto ***physical approach*** si tenta di tradurre la struttura fisica e i meccanismi di funzionamento del dispositivo in un modello circuitale. In questo caso, gli elementi del modello sono, di solito, in stretta corrispondenza con la struttura interna del dispositivo.

Schematicamente si distinguono i seguenti passi:

1. analisi fisica del dispositivo e suddivisione in regioni modellabili separatamente
2. formulazione delle equazioni fisiche nelle varie regioni (\Rightarrow variabili fisiche interne e legame con le tensioni e correnti esterne)
3. semplificazione delle equazioni (es.: riduzione da eq. alle derivate parziali a eq. differenziali ordinarie) e loro soluzione
4. sintesi del modello circuitale non lineare a elementi concentrati (se la riduzione nel passo precedente è stata possibile) o distribuiti

L'efficacia di questo metodo poggia sulla comprensione dettagliata dei meccanismi fisici di funzionamento del dispositivo. Sfortunatamente tale comprensione è spesso incompleta o grossolana. Inoltre l'identificazione con la struttura interna del dispositivo richiede molte ipotesi semplificative e idealizzazioni.

Il cosiddetto ***black-box approach*** diventa importante quando la fisica del dispositivo e i meccanismi di funzionamento non sono del tutto noti, o quando il dispositivo è così complesso che una analisi fisica non sarebbe praticabile. Per esempio, la maggior parte dei modelli circuitali biologici (es.: membrana nervosa di Hodgkin-Huxley) richiede un black-box approach perchè i meccanismi fisici della maggior parte dei sistemi biologici sono ancora poco compresi.

Un altro esempio è rappresentato dalla modellistica dei circuiti VLSI: il numero di componenti che costituisce un circuito VLSI è così grande da rendere impensabile rappresentare ciascuno di essi con un suo proprio modello.

Il punto di partenza più semplice del cosiddetto ***black-box approach*** è talvolta un valido modello "*in continua*". Questo viene poi arricchito con induttori e condensatori in alcune posizioni ragionevoli, tali da consentire la scrittura di equazioni di stato non lineari per il circuito, evitando che la loro soluzione abbia caratteristiche antifisiche (impossibili nel vero dispositivo) quali discontinuità, punti di impasse, eccetera.

Schematicamente, e più in generale, si distinguono i seguenti passi:

1. osservazioni sperimentali sul dispositivo soggetto a vari tipi di ingresso (es. piccoli segnali sinusoidali, ingressi costanti e a gradino di varie ampiezze, forme d'onda periodiche di varia ampiezza e frequenza)

⇒ deduzione di *proprietà qualitative* generali. Osservazioni e proprietà verranno impiegate anche nel passo 3.

2. formulazione di un modello matematico capace di simulare al meglio le proprietà osservate

3. verifica *quantitativa* (confronto fra i dati sperimentali sul dispositivo e quelli provenienti dalla soluzione delle equazioni nelle stesse condizioni) e *qualitativa* (dimostrazione matematica che le equazioni del modello ammettono le proprietà qualitative dedotte al passo 1)

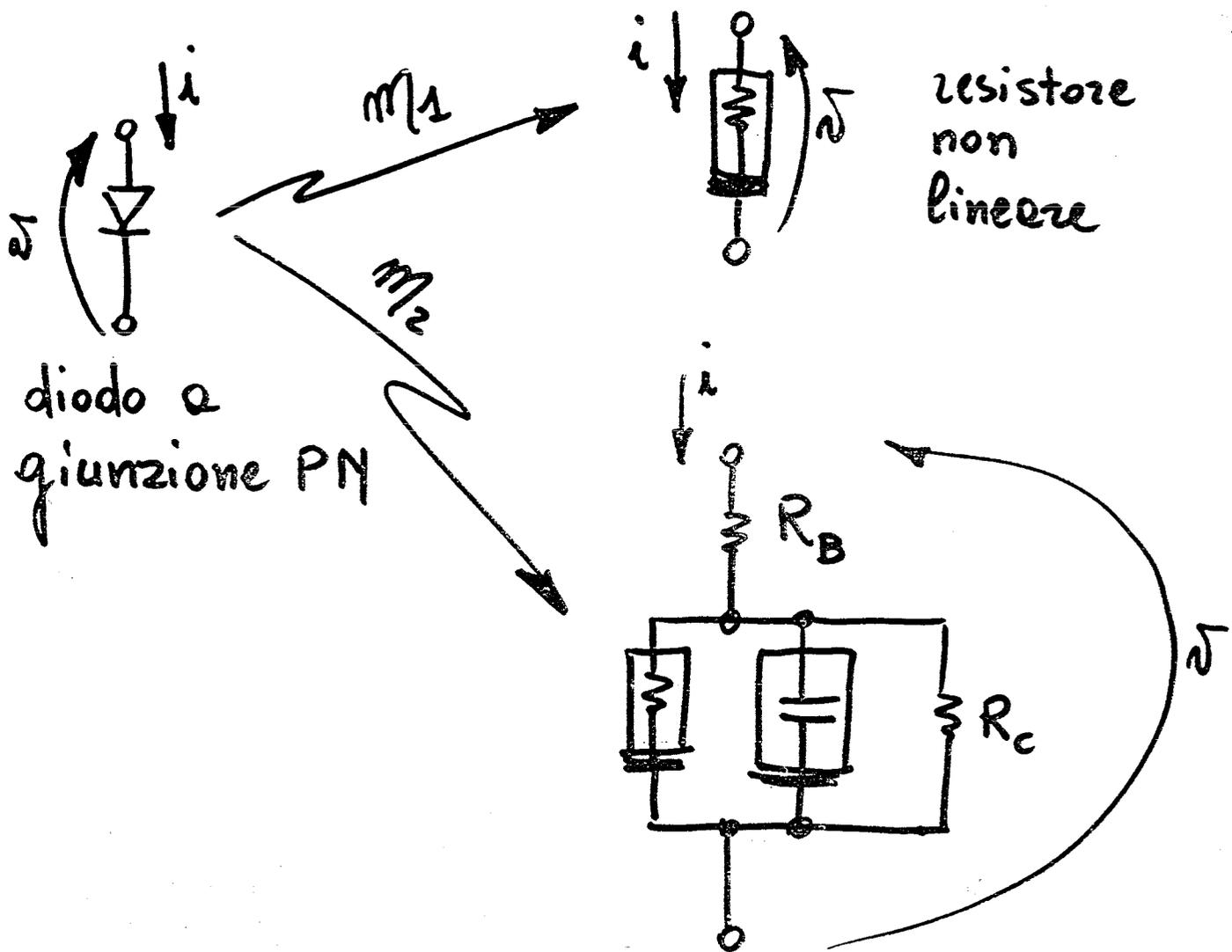
4. sintesi del modello circuitale non lineare (v. commenti relativi al physical approach)

I vantaggi del *black-box approach* sono i seguenti:

-non è necessario conoscere i meccanismi fisici di funzionamento del dispositivo;

-la formulazione di un modello in continua dal quale partire può essere basata su un certo numero di tecniche consolidate (es. Chua, Introduction to nonlinear network theory, Cap. 11);

-ciascun elemento inserito nel modello black-box risponde a una funzione specifica che è nota a chi lo impiega. Ciò può rendere relativamente più semplice l'identificazione dei parametri e delle caratteristiche degli elementi dalle curve sperimentali. Inoltre è più semplice ottenere modelli di complessità ridotta da quello generale formulato in partenza, perchè è più semplice capire quali elementi del modello sono di importanza trascurabile in una particolare situazione fisica (esempio: basse frequenze, alte frequenze, particolari tipi di transitorio)



diode e
giunzione PN

resistore
non
lineare

R_B : resist. di bulk e contatti

R_C : resist. di giunzione (perdite)


 } Cap. stretto di ruotamento
 } Cap. di giunzione

M_1, M_2 sono modelli ottenuti da un "physical approach".

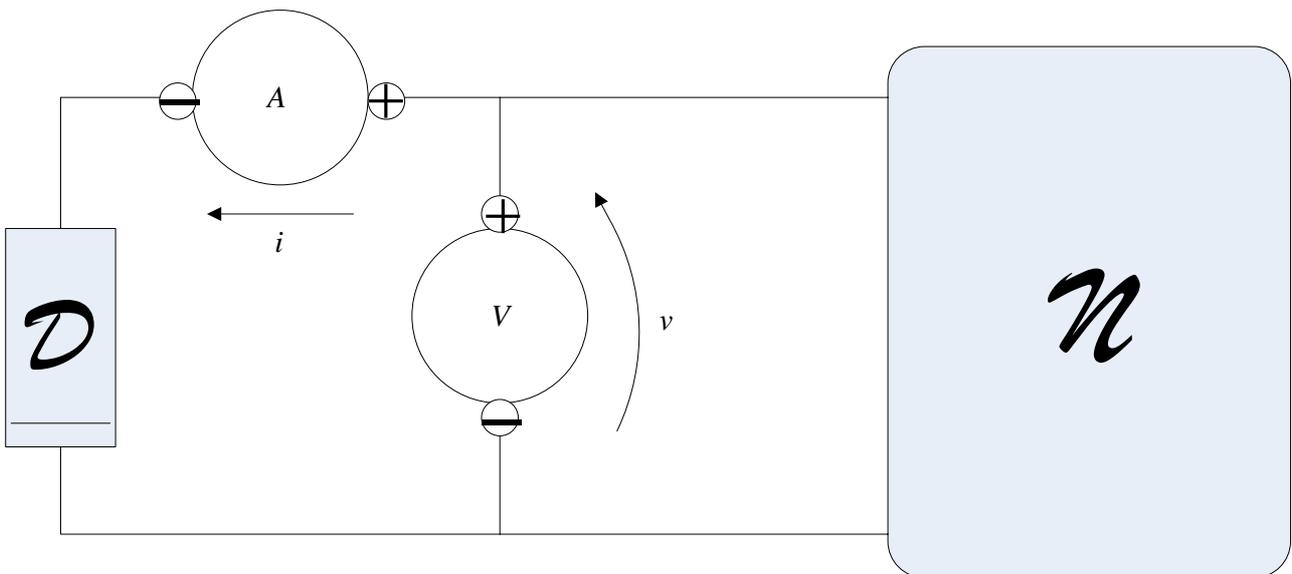
DISPOSITIVO:

congegno elettrico \mathcal{D} a 2 o più terminali accessibili per mezzo dei quali esso scambia potenza elettrica con l'esterno

Esempi

- transistori, operazionali, ecc. (disp. stato solido)
- dispositivi di potenza (trasformatori, convertitori statici)
- dispositivi elettro-chimici
- sistemi biofisici (membrane, nervi *collegati a elettrodi* per investigare l'attività elettrica)

Per \mathcal{D} a due terminali (l'estensione a più terminali è ovvia):



Dal collegamento di \mathcal{D} a *tutti* gli \mathcal{N} concepibili per $t \geq t_0$,
per $t_0 \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow$ misura di $v(t), i(t)$



$\mathcal{F}(\mathcal{D}) \equiv$ insieme di tutte le $v(t), i(t)$ ammissibili

MODELLO

Per semplicità si fa riferimento a dispositivi a 2 terminali.

La misura e/o la memorizzazione di $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ è impossibile.

Un modello $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, circuitale o matematico, genera, collegato a \mathcal{N} nelle stesse condizioni del dispositivo che rappresenta, coppie (v,i) che *approssimano* $\mathcal{F}(\mathcal{D})$.

Modello matematico: è costituito da una o più equazioni matematiche (in generale non lineari). Per una data eccitazione, la soluzione di esse genera una coppia (v,i) che approssima quella corrispondente in \mathcal{D} .

Modello circuitale: è costituito da un insieme di ELEMENTI CIRCUITALI connessi in modo che ogni coppia (v,i) ammissibile del bipolo risultante approssimi quella corrispondente in \mathcal{D} .

Elemento circuitale \mathcal{E} : oggetto per il quale l'insieme $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ è generato da un algoritmo assegnato, detto relazione costitutiva.

\mathcal{E} può essere *semplice* o costituito dalla *combinazione* di elementi semplici.

Nessun modello $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ equivale a \mathcal{D} , nè dal punto di vista circuitale nè da quello matematico.

A seconda delle situazioni fisiche in cui si vuole rappresentare \mathcal{D} , il modello $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ è in generale diverso.

<In ogni data situazione, il miglior modello è il più semplice in grado di dare soluzioni realistiche> (L.O. Chua)

<Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem> (Guglielmo di Occam)

Requisiti generali di un modello

1. Un modello deve essere *ben posto*: se collegato ad altri modelli ben posti non devono nascere situazioni antifisiche
2. *Capacità di simulazione*: dato un insieme finito e predeterminato di coppie (v,i) ammissibili di \mathcal{D} (dati di verifica), i risultati corrispondenti ottenuti per simulazione dovrebbero approssimarli ragionevolmente bene.

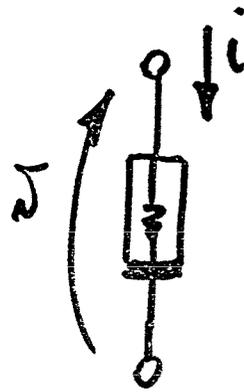
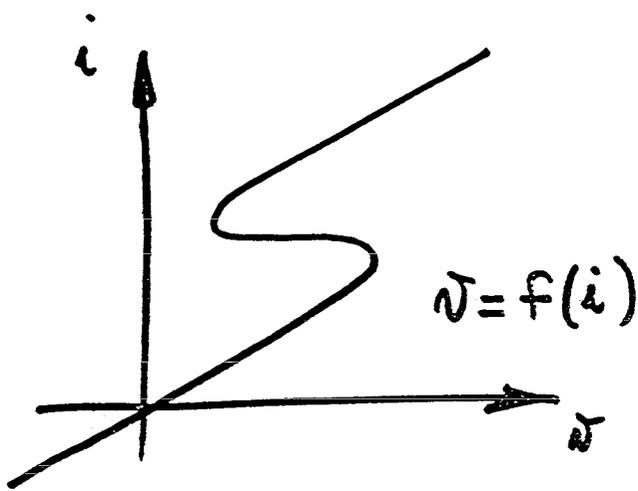
3. *Somiglianza qualitativa*: il modello dovrebbe avere lo stesso comportamento qualitativo mostrato da \mathcal{D} quando collegato agli ingressi appropriati

4. *Capacità predittiva*: il modello dovrebbe essere in grado di predire, con le simulazioni, modi di comportamento sconosciuti a priori \Rightarrow possibilità di concepire nuovi esperimenti e applicazioni.

5. *Stabilità strutturale*: le proprietà qualitative del modello non dovrebbero cambiare per "piccole" perturbazioni dei parametri.

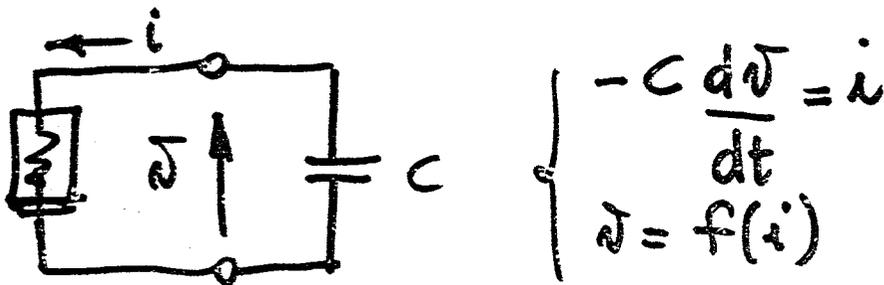
I 5 requisiti suddetti sono necessari solo in un modello generale di dispositivo. In circuiti specifici possono benissimo essere sufficienti modelli che non soddisfano a uno o più di questi requisiti. Un modello di dispositivo contiene sempre parametri che vanno determinati tramite misure sul dispositivo e dipendono solo dal dispositivo: sono, quindi, fissati da questo e non dal circuito cui è collegato.

Gli elementi ideali sono i blocchi da costruzione per la formulazione di un modello circuitale.



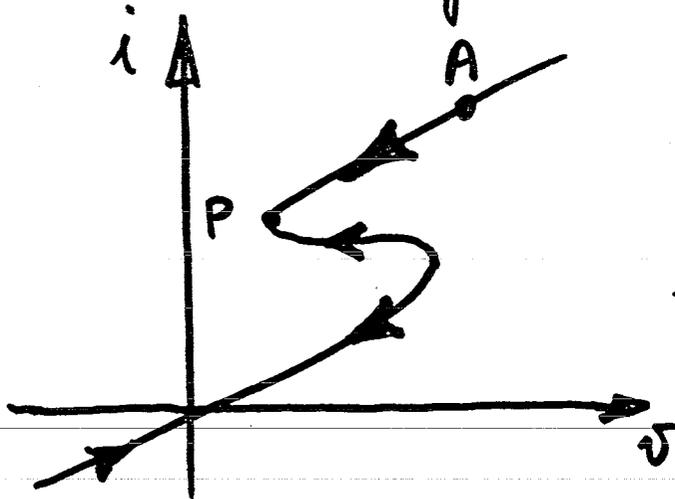
UN RESISTORE NON LINEARE DEF. SU BASE CORRENTE NON È UN MODELLO BEN POSTO DI UN DISPOSITIVO.

INFATTI



f non è invertibile \Rightarrow non si può scrivere l'eq. di stato nella forma normale $\dot{v} = g(v)$. Inoltre, essendo:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{i}{C}$$

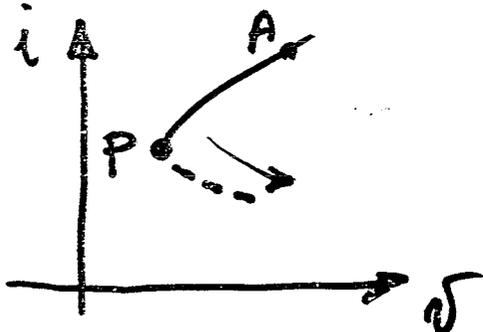


una traiettoria $A \rightarrow P$ si compie in un tempo finito.

Che cosa accade in P ?

In P si dovrebbe avere $\frac{d\bar{v}}{dt} < 0$

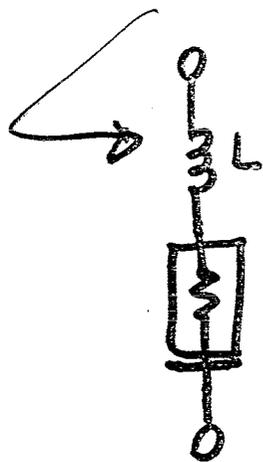
perché $i > 0$. Questa condizione non può essere soddisfatta proseguendo sulla caratteristica: la direzione



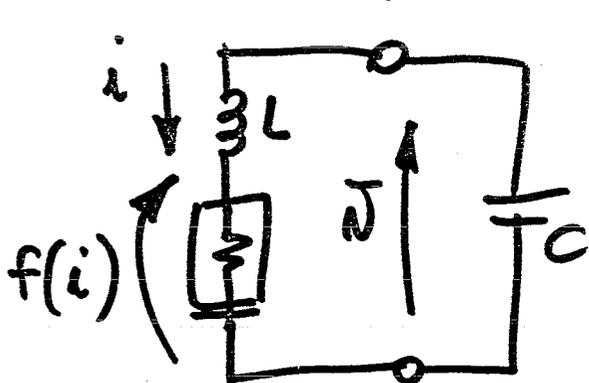
delle frecce implicherebbe $\frac{d\bar{v}}{dt} > 0$

P è un "punto di impasse".

Il modello ben posto richiede un induttore in serie L (anche di "piccola" induttanza).



In questo caso, il circuito



non ha più punti di impasse; ha eq. di stato in forma normale

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{i}{C} \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} [\bar{v} - f(i)] \end{cases}$$

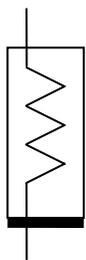
Esempi di relazioni costitutive nel campo lineare:

resistore: $v= Ri ; i=Gv$

induttore : $v = L \frac{di}{dt} ; i = \frac{1}{L} (v^{-1}(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau)$
 $v^{-1}(t) \hat{=} \Phi$ FLUSSO

condensatore : $i = C \frac{dv}{dt} ; v(t) = \frac{1}{C} (i^{-1}(t_0) + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau)$
 $i^{-1}(t) \hat{=} q$ CARICA

nel campo non lineare :

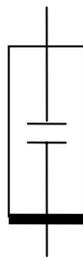


$$\left. \begin{aligned} v &= \hat{v}(i) && \text{(base corrente)} \\ i &= \hat{i}(v) && \text{(base tensione)} \end{aligned} \right\} \text{Forme esplicite}$$

$$f_R(v,i)=0 \quad \text{Forma implicita}$$

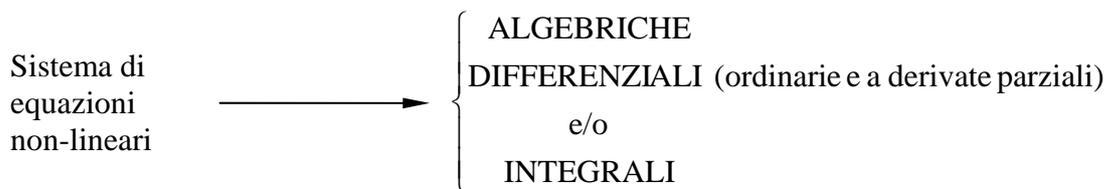


$$f_L(\Phi, i) = 0$$



$$f_C(q, v) = 0$$

Per elementi più complessi la relazione costitutiva può essere un



nelle variabili :

$$\left\{ \begin{array}{l} v ; \quad v^{(k)}(t) = \frac{d^k v(t)}{dt^k} ; \quad v^{(-k)}(t) = v^{(-k)}(t_0) + v^{(-k+1)}(t_0) \cdot (t - t_0) + \dots + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} v(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k \\ \quad (k = 1, \dots,) \quad (t \geq t_0, k = 1, \dots,) \\ i ; \quad i^{(k)}(t) = \frac{d^k i(t)}{dt^k} ; \quad i^{(-k)}(t) = i^{(-k)}(t_0) + i^{(-k+1)}(t_0) \cdot (t - t_0) + \dots + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} v(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k \\ \quad (k = 1, \dots,) \quad (t \geq t_0, k = 1, \dots,) \\ \text{altre eventuali } \textit{variabili interne}, \text{ anch'esse con derivate e integrali ;} \end{array} \right.$$

Ciò é particolarmente evidente se si considerano alcuni modelli matematici (ai quali si possono far corrispondere modelli circuitali) come esempi di possibili relazioni costitutive.

Esempi:

Induttore isteretico sottoposto a ingresso periodico :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = g(i - f(v^{(-1)})) \\ \text{con } g(\cdot), f(\cdot) \text{ continue e monotone crescenti} \end{array} \right.$$

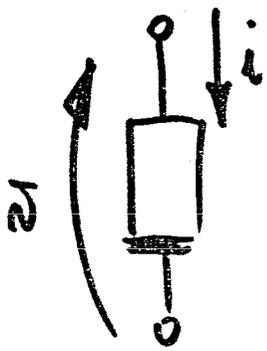
Questa relazione costitutiva coinvolge solo le variabile descrittive $\{v, i, \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} v(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k$ variabile interna .

Induttore isteretico sottoposto a ingresso dc e/o periodico :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = w(i^{(1)})h(v)g(i - f(v^{(-1)})) \\ w(\cdot), h(\cdot), g(\cdot), f(\cdot) \text{ opportunamente definite} \end{array} \right. \quad \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} i(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_k$$

Anche in questo caso sono coinvolte solo variabili descrittive $\{v, i, i^{(1)}, v^{(-1)}\}$.

Entrambi questi esempi sono ottenuti da un “black-box approach”.



termistore a coeff. negativo
di temperatura

$$\bar{v} = R_0 \exp \left[\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \cdot i$$

R_0 costante
 β costante
 T_0 temp. riferim.
 T temp. assoluta
 cost. di dissipaz.

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{\Sigma}{C} \cdot (T - T_0) + \frac{\bar{v}}{C} \cdot i$$

capacità termica

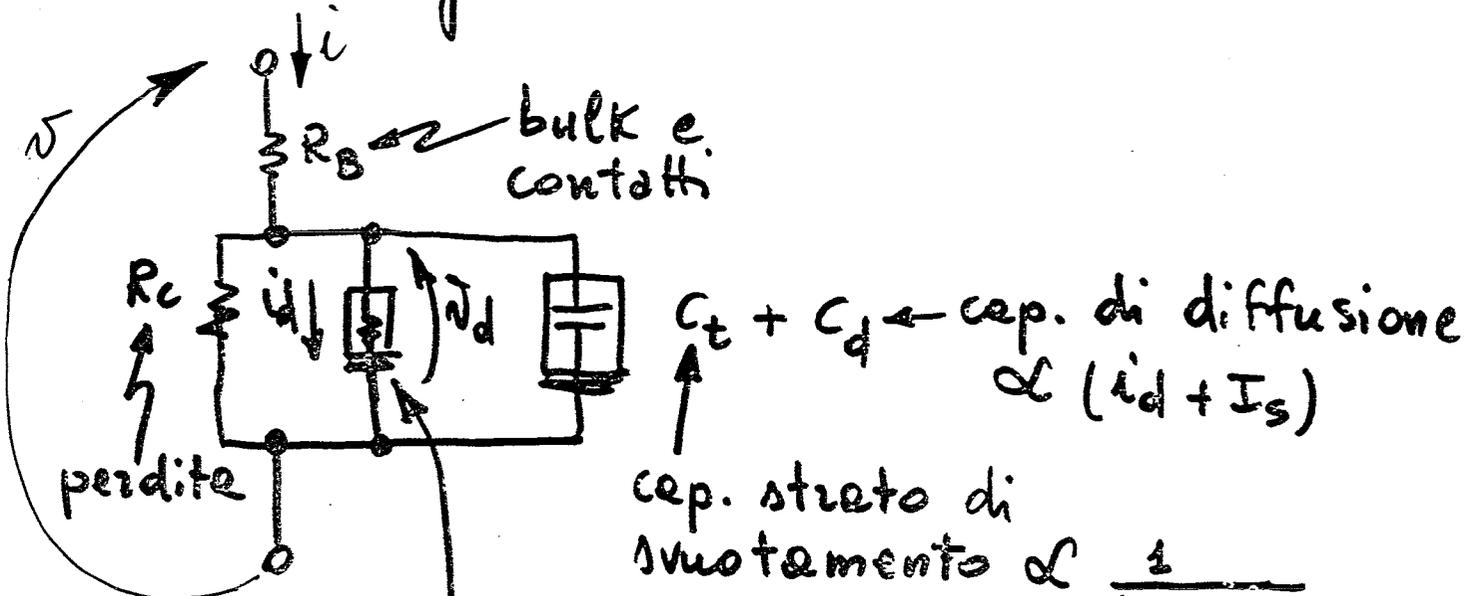
il modello "black-box" è dunque

$$\begin{cases} f_1(\bar{v}, i, T) = 0 \\ f_2(\bar{v}, i, T, T^{(1)}) = 0 \end{cases}$$

in questo caso la temperatura ha
il ruolo di una **VARIABLE INTERNA**
(presente anche con la derivata
prima)

ALTRI ESEMPI DI RELAZIONI COSTITUTIVE COMPLESSE SONO DEDUCIBILI DA MODELLI OTTENUTI DA UN "PHYSICAL APPROACH"

Diodo a giunzione - modello 1



$$i_d = I_s \left[\exp \frac{q \bar{v}_d}{MKT} - 1 \right]$$

cap. stretto di svuotamento $\propto \frac{1}{(V_x - V_d)^n}$
const.

$$C_t = \frac{dq_t}{d\bar{v}_d} \Rightarrow q_t = \int_0^{\bar{v}_d} C_t d\bar{v}_d \propto \int_0^{\bar{v}_d} \frac{d\bar{v}_d}{(V_x - V_d)^n} \Rightarrow q_t = q_t(\bar{v}_d)$$

$$i_d = q(\bar{v}_d) \Rightarrow i_d + I_s \propto \exp \left(\frac{q \bar{v}_d}{MKT} \right) \Rightarrow C_d = \frac{dq_d}{d\bar{v}_d} \propto i_d + I_s \propto \exp \left(\frac{q \bar{v}_d}{MKT} \right) \Rightarrow q_d = q_d(\bar{v}_d)$$

ALLORA:

$$i = \underbrace{q(\bar{v}_d) + \frac{\bar{v}_d}{R_c}}_{\eta(\bar{v}_d)} + \frac{d}{dt} \left[\underbrace{q_t(\bar{v}_d) + q_d(\bar{v}_d)}_{\psi(\bar{v}_d)} \right]$$

Le equazioni che individuano la relazione costitutiva sono

$$\begin{cases} i = \eta(\bar{v}_d) + \frac{d}{dt} [\Psi(\bar{v}_d)] \\ \bar{v} = R_b i + \bar{v}_d \Rightarrow \bar{v}_d = \bar{v} - R_b \cdot i \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \eta(\bar{v} - R_b \cdot i) + \left. \frac{d\Psi}{d\bar{v}_d} \right|_{\bar{v}_d = \bar{v} - R_b \cdot i} \cdot \frac{d}{dt} (\bar{v} - R_b \cdot i) \Rightarrow$$

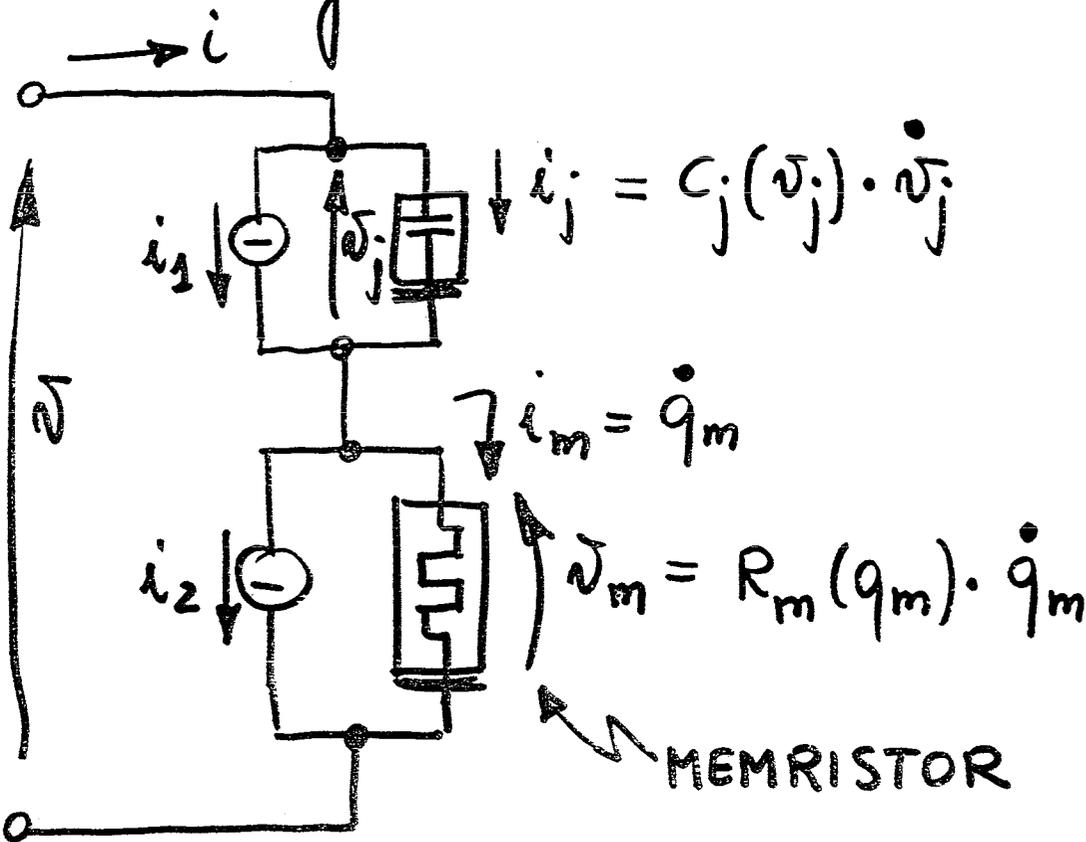
\Rightarrow ci si riporta ad una sola equazione:

$$f(i, \bar{v}, i^{(1)}, \bar{v}^{(1)}) = 0$$

senza variabili interne.

Questo modello non è molto accurato per il caso di ingranaggi e gradino.

diodo e giunzione - modello 2



Equazioni:

$$\begin{cases}
 i = i_1 + i_j \\
 i = i_2 + \dot{q}_m \\
 v = v_j + v_m \\
 i_j = C_j(v_j) \cdot \dot{v}_j \\
 v_m = R_m(q_m) \cdot \dot{q}_m \\
 i_1 = I_1(i, i_j, v_j, q_m) \\
 i_2 = I_2(q_m)
 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases}
 i = I_1(i, i_j, v_j, q_m) + C_j(v_j) \cdot \dot{v}_j \\
 i = I_2(q_m) + \dot{q}_m \\
 v = v_j + R_m(q_m) \cdot \dot{q}_m \\
 i_j = C_j(v_j) \cdot \dot{v}_j
 \end{cases}$$

\Downarrow

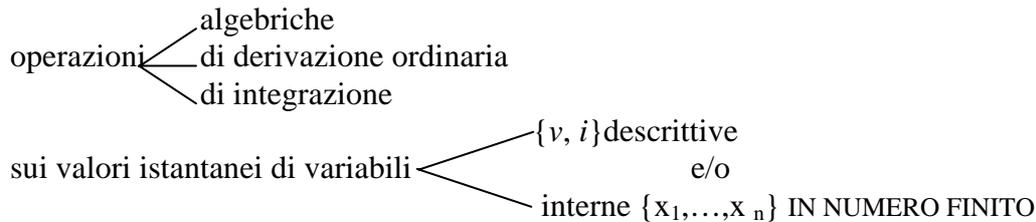
$$\begin{cases}
 0 = f_k(v, i, v_j, v_j^{(1)}, i_j, q_m, q_m^{(1)}) \\
 k = 1, \dots, 4
 \end{cases}$$

variabili interne: v_j, i_j, q_m

ELEMENTI \mathcal{C} CONCENTRATI



La relazione costitutiva si può esprimere tramite un numero finito di equazioni contenenti solo



Quindi la relazione costitutiva per un elemento \mathcal{C} , concentrato, a 2 terminali consiste di un numero finito M di equazioni della forma :

$$f_j(v, i; v^{(1)}, \dots, v^{(\alpha)}; i^{(1)}, \dots, i^{(\beta)}; v^{(-1)}, \dots, v^{(-\gamma)}; i^{(-1)}, \dots, i^{(-\delta)}; x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_i^{(k_i)}, \dots, x_n^{(k_n)}; t) = 0$$

dove :

$k_i \geq 0$ (derivate oppure ordine 0) per $i \leq l$

$k_i < 0$ (integrali) per $i > l$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

x_i variabili interne

Considerazioni:

\mathcal{C} lineare $\Leftrightarrow f_1(\cdot), \dots, f_M(\cdot)$ sono funzioni lineari di tutte le variabili $\forall t$

\mathcal{C} TEMPO-INVARIANTE \Leftrightarrow non c'è t come argomento esplicito delle f_j

ELEMENTI \mathcal{C} DISTRIBUITI



In tutti gli altri casi

NOTA:

Le definizioni di elemento “concentrato”, “tempo-invariante”, “lineare” si applicano anche a un elemento multi-terminale o multi-porta. Ogni elemento concentrato a $(n+1)$ terminali o n -porte è descritto da equazioni $f_j(\dots)=0$ nelle quali le variabili si intendono come VETTORI.

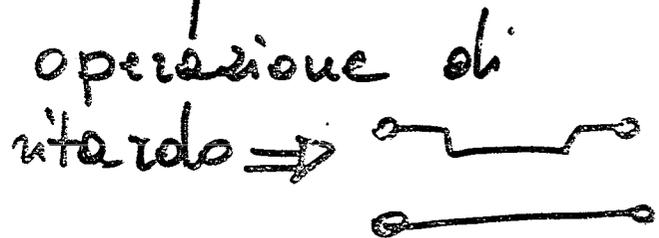
DIODO IMPATT (IMPact Avalanche Transit-Time)

$$\left\{ \begin{aligned} v &= v_a + v_d \\ \frac{di_a}{dt} &= f_1(i_a, v_a) \\ \frac{dv_a}{dt} &= f_2(i, i_a) \\ \frac{dv_d}{dt} &= \frac{1}{C_d} \left[i_a - \frac{1}{\tau_d} \int_0^t h(\tau) i_a(t-\tau) d\tau \right] \end{aligned} \right.$$



CONVOLUZIONE

$$\int_0^t h(\tau) i_a(t-\tau) d\tau$$



Variabili: i, v, i_a, v_a, v_d

variabili interne

Il modello circuitale richiede un
ELEMENTO DISTRIBUITO

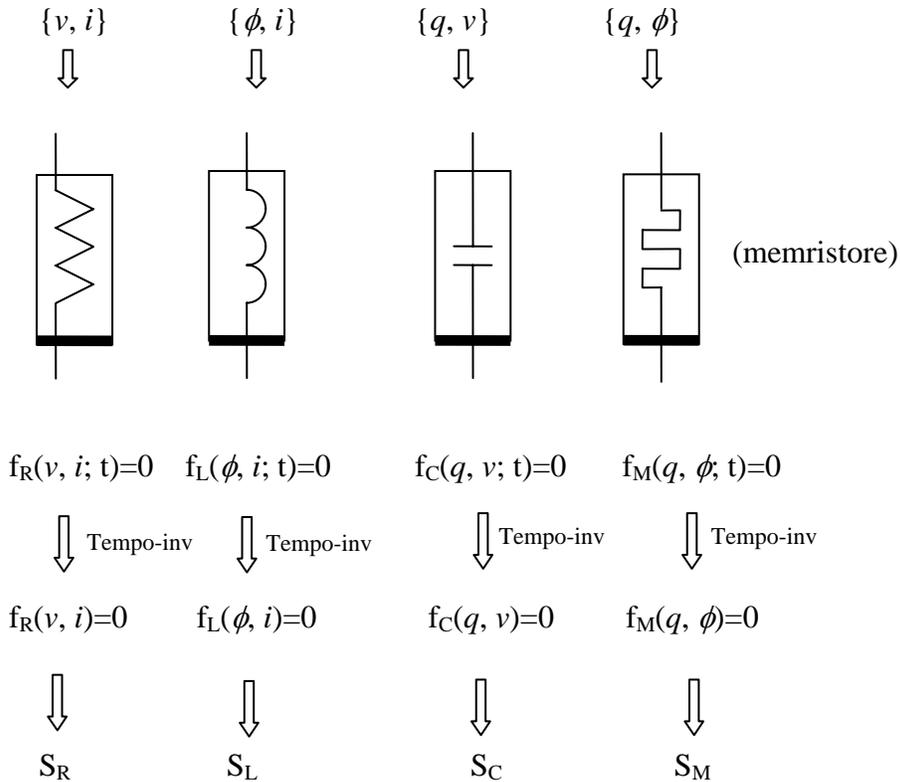
Elementi fondamentali a due terminali

Le 4 variabili fondamentali sono: $\{v, i, q, \phi\}$.

Ad un bipolo ne va associata una coppia.

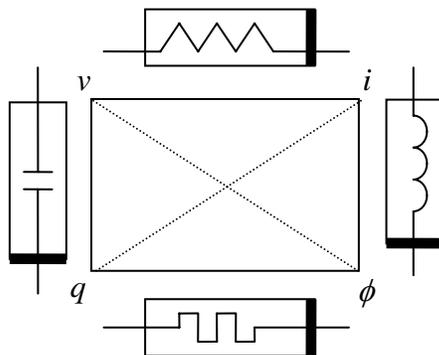
Le coppie distinte sono 6, ma le coppie $\{v, \phi\}$ e $\{i, q\}$ sono dinamicamente dipendenti.

Restano allora le coppie:



S_R, S_L, S_C, S_M sono gli insiemi di punti (usualmente curve) che esprimono la relazione costitutiva nel caso tempo-invariante.

Le quattro coppie sopra citate sono riassunte mnemonicamente dal diagramma:



Questo diagramma riassume l'impostazione assiomatica seguita. Le diagonali tratteggiate

rappresentano la dipendenza dinamica fra i , q e fra v , ϕ .

Nota: un memristore lineare $\phi=M_0q$ equivale a un resistore lineare con $R=M_0$. Per questo motivo esso è SUPERFLUO NEI CIRCUITI LINEARI .

Le relazioni algebriche:

$$f_R(i, v; t)=0 \quad ; \quad f_L(\phi, i; t)=0 \quad ; \quad f_C(q, v; t)=0 \quad ; \quad f_M(q, \phi; t)=0$$

non debbono essere necessariamente date in forma analitica esplicita.

Ecco alcune possibilità per f_R , nel caso tempo-invariante:

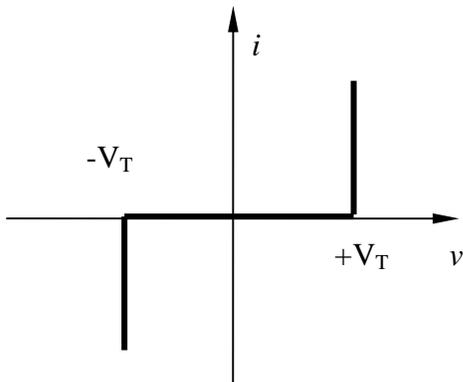
se S_R è una curva continua , può essere descritta da due equazioni parametriche

$$\begin{cases} v = \hat{v}(x) \\ i = \hat{i}(x) \end{cases} \quad x \in (a, b)$$

Per ogni x viene così generato un punto di S_R .

La funzione $f_R(v, i)=0$ indica l'insieme di tutte le (v, i) generate al variare di x nell'una o nell'altra formulazione.

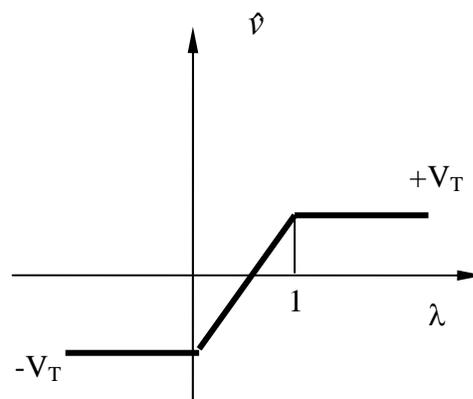
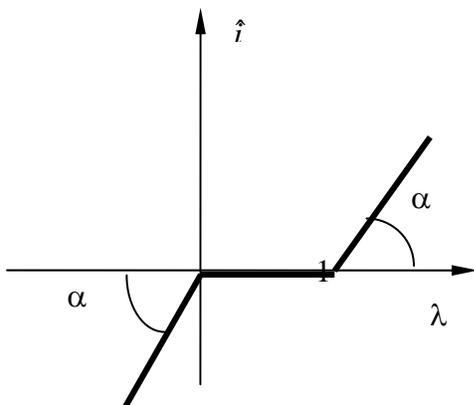
Per esemplificare ulteriormente si può considerare la S_R di un resistore PWL ("piecewise linear", lineare a tratti) come questo, non definito né su base tensione né su base corrente.



Esso può essere descritto parametricamente così:

$$\begin{cases} \lambda \in (-\infty, +\infty) \\ i = \hat{i}(\lambda) \\ v = \hat{v}(\lambda) \end{cases}$$

ove:



$\text{tg}(\alpha) = I_0$ (arbitraria);

$\lambda=0$ é stato fatto arbitrariamente corrispondere al punto angoloso ($i=0, v=-V_T$);

$\lambda=1$ al punto angoloso ($i=0, v=+V_T$).

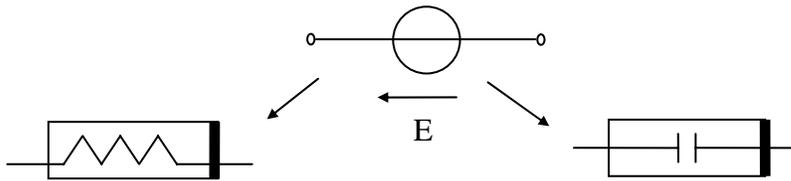
Nel NULLATORE la S_R è un punto (l'origine). In questo caso si può scrivere:

$$\begin{cases} v=0 \\ i=0 \end{cases} \quad \text{oppure :} \quad f_R(v, i; t) = \frac{v^2}{V_0^2} + \frac{i^2}{I_0^2} = 0 \quad (V_0, I_0 \text{ costanti di normalizzazione})$$

Il NORATORE ha $S_R = \mathcal{R}^2$ (tutto il piano!). Si può scrivere, allora:

$$\begin{cases} v = x_1 \\ i = x_2 \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2$$

Un generatore di tensione costante è definito dalla relazione costitutiva $v=E$ e può essere considerato nei due modi seguenti:



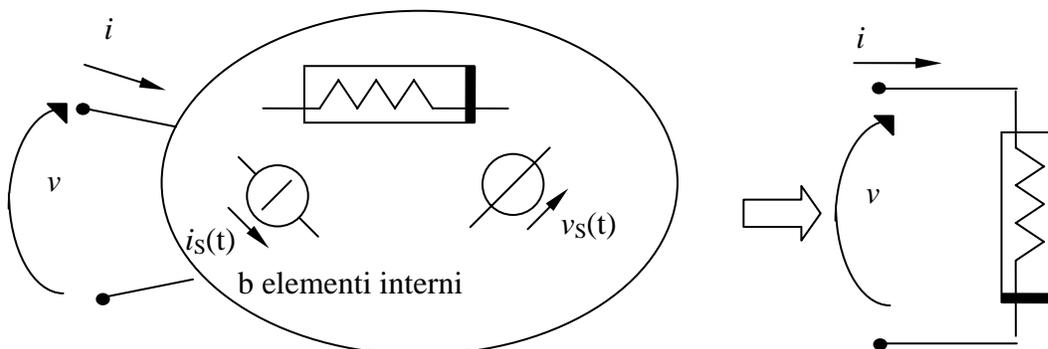
$$S_R = \{(v, i) : v=E, i \in \mathcal{R}^1\}$$

$$S_C = \{(q, v) : v=E, q \in \mathcal{R}^1\}$$

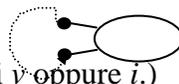
Analogamente un generatore di corrente può essere inteso come un resistore o un induttore.

Proprietà di chiusura per l'elemento: una interconnessione arbitraria di elementi a due terminali dello stesso tipo equivale a un elemento dello stesso tipo.

Per l'interconnessione arbitraria di elementi resistivi, ad esempio, si ha:



Dentro la sup. limite : b elementi resistivi (anche i generatori $v_s(t)$ e $i_s(t)$ sono elementi “resistivi”).

Grafo complessivo: b+1 lati (b interni + il lato sui due morsetti ). Su quest’ultimo si può pensare applicato un generatore che assegni v oppure i .)

Equazioni topologiche:

$$\left. \begin{array}{l} [B] \begin{bmatrix} v \\ \dots \\ \underline{v}_{int} \\ i \\ \dots \\ \underline{i}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \\ [Q] \begin{bmatrix} v \\ \dots \\ \underline{v}_{int} \\ i \\ \dots \\ \underline{i}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} (b+1) \text{ equazioni in totale}$$

ove \underline{v}_{int} , \underline{i}_{int} sono i vettori costituiti dalle v_j e i_j rispettivamente

Equazioni dei componenti (interni) : $f_j(v_j, i_j ; t)=0 \quad j=1, \dots, b$

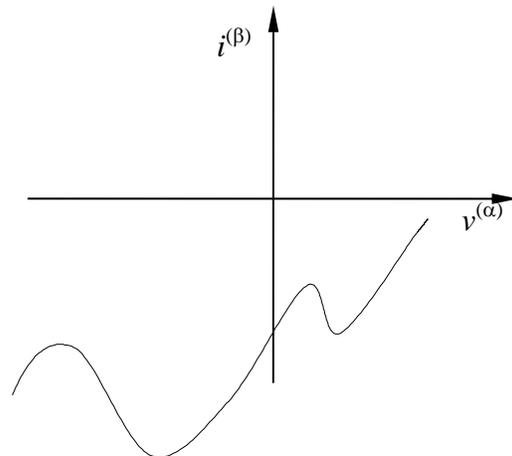
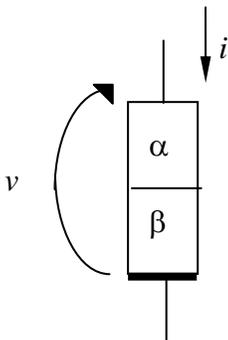
Perciò:

$2b+1$ equazioni in $2(b+1)=2b+2$ variabili \Rightarrow in linea di principio si possono eliminare le $2b$ variabili interne v_j, i_j e riportarsi ad una sola relazione $f_R(v, i ; t)=0$. In realtà la $f_R(\dots)=0$ è solo simbolica perché, in generale, non è ottenibile in forma analitica chiusa. Comunque è una relazione algebrica ben definita perché, data una $i(t_0)$, si può determinare $v(t_0)$ e viceversa.

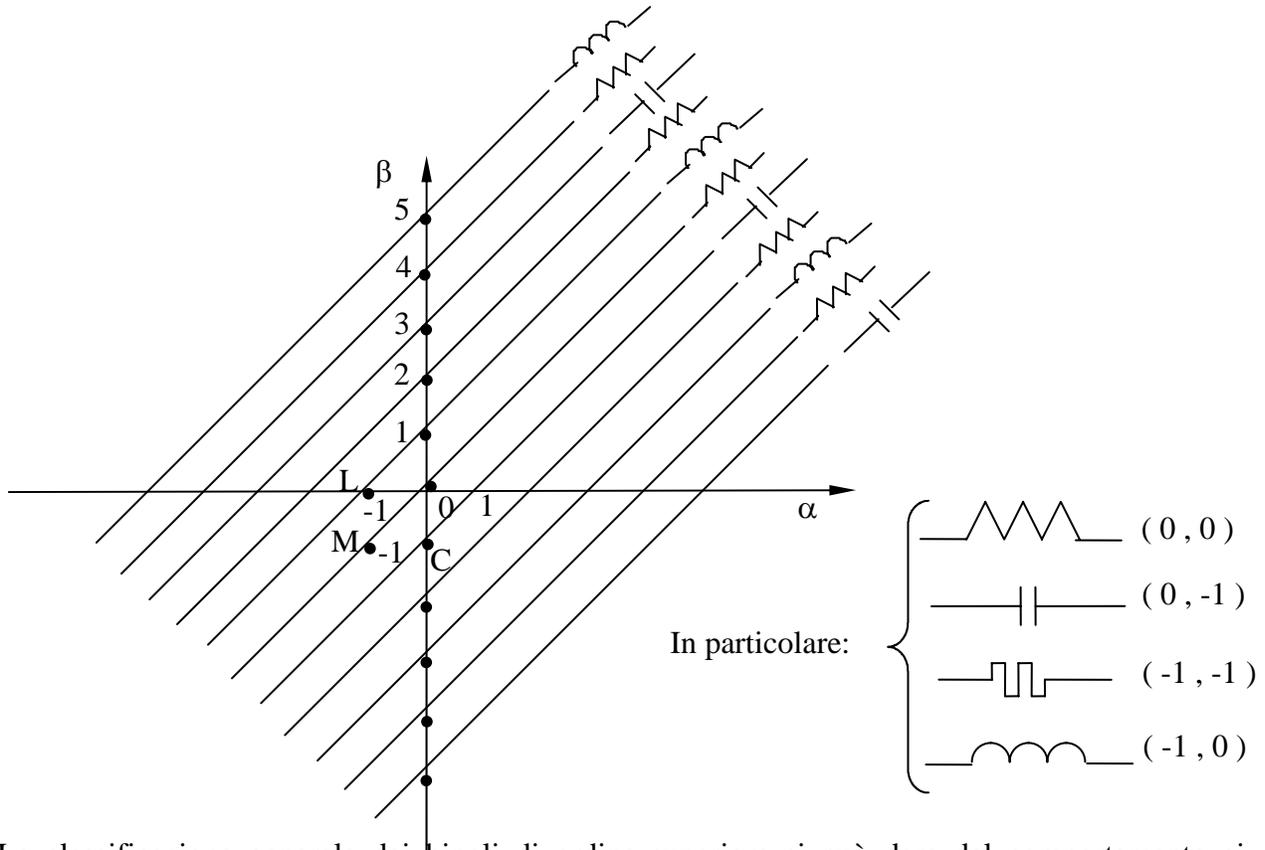
La  equivale a un resistore a due terminali.

Bipoli di ordine superiore.

L’impostazione assiomatica sui 4 elementi fondamentali si può generalizzare per definire una varietà infinita di elementi di ordine superiore:



Elemento $v^{(\alpha)} - i^{(\beta)}$: è definito da una relazione costitutiva fra le sole variabili $v^{(\alpha)}$ e $i^{(\beta)}$.
 Gli elementi possono essere rappresentati nel piano (α, β) , nel quale, ovviamente, solo i valori INTERI di α, β hanno significato



La classificazione generale dei bipoli di ordine superiore si può dare dal comportamento ai PICCOLI SEGNALE:

$$\delta v^{(\alpha)}(t) = m_Q \delta i^{(\beta)}(t) \quad m_Q: \text{pendenza nel punto di lavoro } Q$$

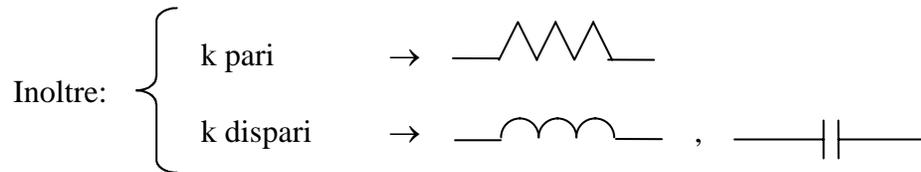
$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta v(t)\} &= Z(s) \mathcal{L}\{\delta i(t)\} & \Rightarrow s^\alpha V(s) &= m_Q s^\beta I(s) & \Rightarrow \\ \Rightarrow V(s) &= \underbrace{m_Q s^{\beta-\alpha}}_{Z(s)} I(s) & \Rightarrow Z(j\omega) &= (j\omega)^{\beta-\alpha} m_Q \end{aligned}$$

1. Se $(\beta-\alpha) = \pm 2n \quad n=0,1,2,\dots$ allora $Z(j\omega) = (-1)^n \omega^{\beta-\alpha} m_Q \equiv R(\omega) \Rightarrow$ si ottiene un resistore dipendente dalla frequenza (FDR)
2. Se $(\beta-\alpha) = (-1)^n (2n+1) \quad n=0,1,2,\dots$ allora $Z(j\omega) = j \omega^{\beta-\alpha} m_Q \equiv j\omega L(\omega) \Rightarrow$ induttore dipendente dalla frequenza
3. Se $(\beta-\alpha) = (-1)^{n+1} (2n+1) \quad n=0,1,2,\dots$ allora $Z(j\omega) = -j \omega^{\beta-\alpha} m_Q \equiv -j1/\omega C(\omega) \Rightarrow$ condensatore dipendente dalla frequenza

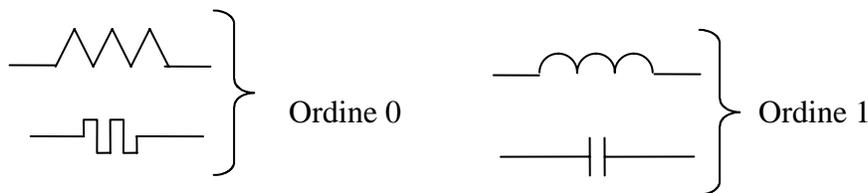
Il MEMRISTOR non compare perché, ai piccoli segnali, è un resistore: comunque è localizzato nel vertice M del quadrato OLMC.

Sulle varie rette, solo i punti a coordinate intere contano.

In generale, per $\beta - \alpha = \pm k$ si parla di elemento di ordine k.



In particolare:



Se la relazione costitutiva è lineare, si arriva ad avere:

$$\left. \begin{array}{l} v = m \frac{d^k i}{dt^k} \quad \text{se } k > 0 \\ i = \frac{1}{m} \frac{d^k v}{dt^k} \quad \text{se } k < 0 \end{array} \right\} \text{ e tutti gli elementi lineari dello stesso ordine } k \text{ sono identici}$$

In particolare, un condensatore lineare è individuato come (0,-1) ma anche come (1,0); un induttore come (-1,0) ma anche come (0,1).

Considerazioni:

- # Gli elementi non lineari $v^{(\alpha)}-i^{(\beta)}$ sono tra loro indipendenti. Nessuna curva non lineare $v^{(\alpha)}-i^{(\beta)}$ può essere sintetizzata combinando fra loro elementi non lineari con diversi α, β .
- # Vigee una proprietà di chiusura per ogni elemento: connettendo arbitrariamente elementi con la stessa coppia (α, β) si ottiene ancora un elemento dello stesso tipo.
- # Le $R(\omega), C(\omega), L(\omega)$ sono funzioni PARI di ω . Per modellare una funzione arbitrariamente assegnata $(R(\omega), C(\omega), L(\omega))$, occorre in generale disporre dell'intera famiglia di elementi di ordine superiore.

- # L'elemento (2,0) $i = \frac{1}{m} \frac{d^2 v}{dt^2}$ è un FDNR (Frequency-Dependent Negative Resistor: $\beta - \alpha = -2$;
 $Z(j\omega) = (j\omega)^{-2} m_Q = (1/\omega^2) m_Q$), ed è attualmente usato nella sintesi di filtri.

Una ragione importante di impiego degli elementi di ordine superiore è per la ELIMINAZIONE DEI PUNTI DI IMPASSE.

Punti di impasse e loro eliminazione con elementi di ordine superiore

Concetto.

I punti di impasse in un circuito sono caratterizzati dal fatto di essere raggiungibili in un tempo finito e dal fatto che in essi la soluzione cessa di esistere.

CHUA (CAS 27, Nov1980, *Dynamic Nonlinear Networks: State of the Art*) dà due definizioni (la prima è “meno formale” della seconda):

1. (p.1062, nota 5) :

un punto \underline{x}^* di un sistema autonomo $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ è un punto di impasse se la soluzione cessa di esistere dopo avere raggiunto \underline{x}^* in un tempo finito (in avanti o all’indietro).

2. (P.1073, def.3) :

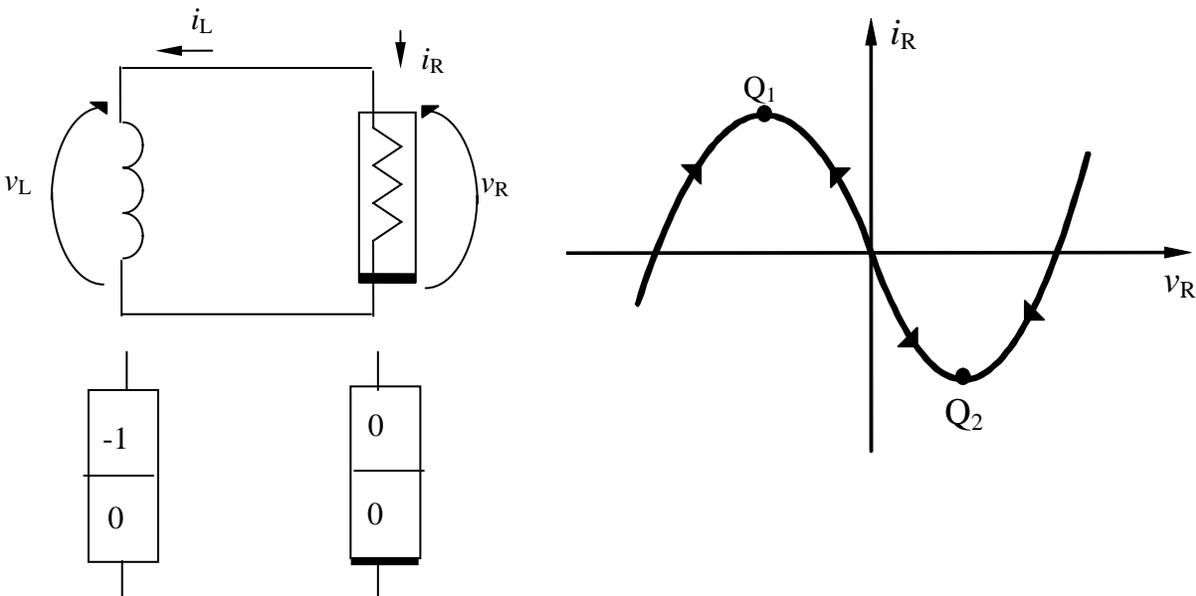
un punto $Q(q_{C_Q}, \phi_{L_Q}, v_{C_Q}, i_{L_Q})$ che soddisfa le relazioni costitutive di induttori e condensatori in una rete RLC (capacitor-inductor operating point Q) si dice punto di impasse della rete RLC \Leftrightarrow non \exists funzioni $C^1(q_C(t), \phi_L(t), v_C(t), i_L(t))$ con

$$(q_C(t_0), \phi_L(t_0), v_C(t_0), i_L(t_0)) = (q_{C_Q}, \phi_{L_Q}, v_{C_Q}, i_{L_Q})$$

che soddisfino le leggi di Kirchoff e le relazioni costitutive per $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$.

Entrambe le definizioni affermano *che non possono esistere soluzioni che attraversino un punto di impasse.*

Esempio di circuito con punti di impasse:



Nel circuito, tenendo conto della caratteristica $i_R(v_R)$ si ha:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \rightarrow v_R = -L \frac{di_R}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{di_R}{dt} = -\frac{v_R}{L} \begin{cases} < 0 \text{ per } v_R > 0 \\ > 0 \text{ per } v_R < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall i_R(0)$ si va, in TEMPO FINITO, a Q_1 oppure a Q_2 (v. traiettoria) dopodiché la soluzione non può più essere definita. La situazione non è più fisica. Per questo motivo i punti Q_1 e Q_2 si dicono “punti di impasse”. Il circuito è da considerare “incompleto”, particolarmente dal punto di vista modellistico: si ricordi che un modello deve essere “ben posto”.

NOTA:

Un altro modo di valutare la non fisicità della situazione in Q_1, Q_2 è questo:

$$\frac{di_R}{dt} = \frac{di_R}{dv_R} \frac{dv_R}{dt} = 0 \text{ in } Q_1, Q_2 \text{ perché } \left. \frac{di_R}{dv_R} \right|_{Q_1, Q_2} = 0 .$$

Pertanto la $\frac{di_R}{dt} = -\frac{v_R}{L}$ diventa $0 = -\frac{v_R}{L} \Big|_{Q_1, Q_2}$ che è ASSURDA, perché in Q_1 e Q_2 si ha $v_R \neq 0$ (v. caratteristica).

Il fenomeno dei punti di impasse si trova in molti circuiti e sistemi non lineari. La presenza di un punto di impasse implica che il modello circuitale è carente e deve essere completato aggiungendo nei punti appropriati elementi "parassiti" (nei casi più comuni induttori e/o condensatori) che permettano di predire la biforcazione (jump phenomenon) da evoluzione lenta a evoluzione veloce che viene osservata sperimentalmente.

I casi più **semplici** riguardano circuiti dinamici non lineari contenenti almeno un **resistore** non lineare avente caratteristica *non monotona* la cui variabile indipendente *non possa* essere scelta come *variabile di stato*. Esempi:

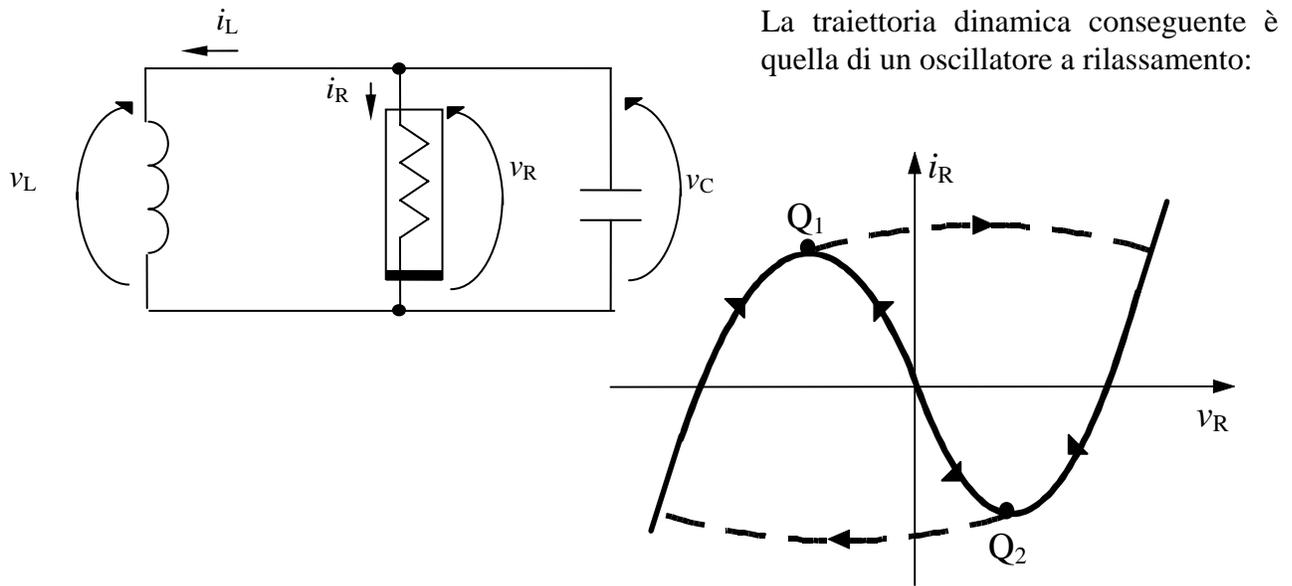
resistore con $i=g(v)$ non monotona in serie a un induttore

resistore con $v=f(i)$ non monotona in parallelo a un condensatore

ogni minimo o massimo locale di $g(v)$ e di $f(i)$ che non sia un punto di equilibrio è un *punto di impasse*.

La presenza di punti di impasse può portare a conclusioni errate nella simulazione numerica di un circuito. E' stato mostrato (Chang-Deng, CTA, vol. 17, 1989, pp. 213-235) che, in prossimità di un punto di impasse, una simulazione numerica del relativo sistema implicito di equazioni algebriche e differenziali darebbe luogo a una oscillazione di piccola ampiezza ma di natura estranea e casuale. Viceversa, la simulazione numerica di un circuito con autovalori che differiscano di molti ordini di grandezza (stiff) ma che non ha punti di impasse potrebbe evolvere come se li avesse (numerical impasse points).

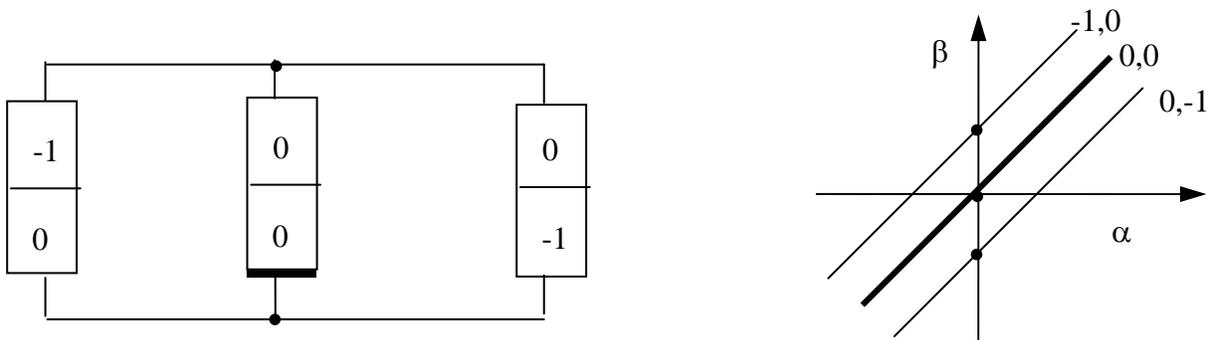
L'elemento più semplice da introdurre nel circuito per rimuovere i punti di impasse e quindi le "non fisicità" è un condensatore lineare (di capacità anche "assai piccola", purchè ≠0):



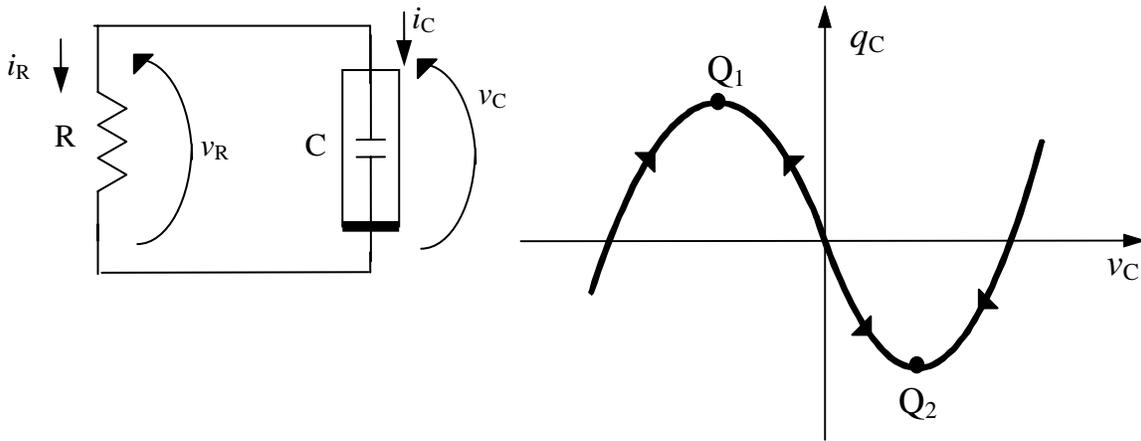
come si potrebbe ottenere considerando le equazioni del circuito:

$$v_C = v_R \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_R}{dt} = v_C^{(1)} \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{v_C}{L} \left[= \frac{v_R}{L} \right] \\ i_L + i_R(v_R) + C \frac{dv_C}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_R}{dt} = v_C^{(1)} \\ \frac{v_R}{L} + \underbrace{\frac{di_R}{dv_R}}_{g(v_R)} v_C^{(1)} + C \frac{d}{dt}(v_C^{(1)}) = 0 \end{cases}$$

nelle quali non esiste la possibilità di avere situazioni di impasse. I tre bipoli del circuito sono classificati, in termini di coppie (α, β) , nel modo seguente:



Questa rappresentazione servirà per la deduzione della regola.
 Altro esempio di circuito con punti di impasse è il seguente:



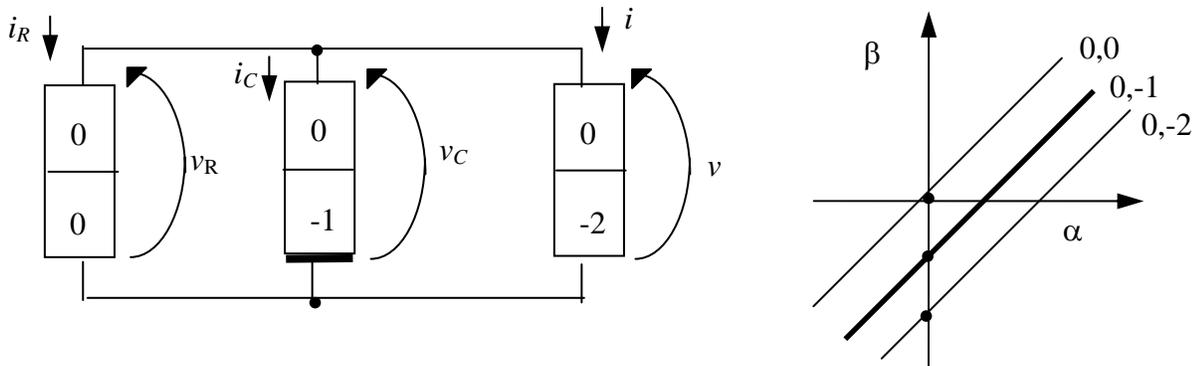
$$\left\{ \begin{array}{l} v_R = Ri_R \\ v_C = v_R \\ i_C = -i_R \\ q_C = q_C(v_C) \end{array} \right\} \Rightarrow v_C = -Ri_C$$

$$\Rightarrow \frac{dq_C}{dt} = -\frac{v_C}{R} \begin{cases} < 0 \text{ per } v_C > 0 \\ > 0 \text{ per } v_C < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow si deducono le traiettorie di figura e Q_1, Q_2 sono punti di IMPASSE.

Per Q_1, Q_2 valgono considerazioni analoghe a quelle sviluppate nella nota dell'esempio precedente con:
 $\frac{dq_C}{dt} = \frac{dq_C}{dv_C} \frac{dv_C}{dt}$
 in luogo di $\frac{di_R}{dt}$.

L'elemento più semplice da includere per rimuovere i punti di impasse è, in questo caso, un elemento lineare (0,-2) ossia del tipo $i = m \frac{d^2v}{dt^2}$.



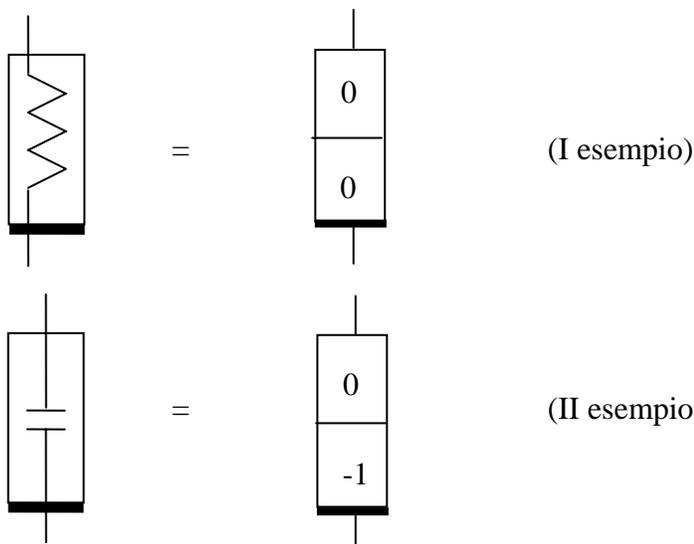
Infatti si può scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_C}{dt} = \frac{dv}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dt} \right) = \frac{i}{m} = -\frac{1}{m} \left[\underbrace{\frac{v_C}{R}}_{i_R} + \underbrace{\frac{d}{dt} (q_C(v_C))}_{i_C} \right] \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_C}{dt} = v^{(1)} \\ \frac{dv^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{m} \left[\frac{v_C}{R} + \underbrace{\frac{dq_C}{dv_C} v^{(1)}}_{C(v_C)} \right] \end{array} \right\}$$

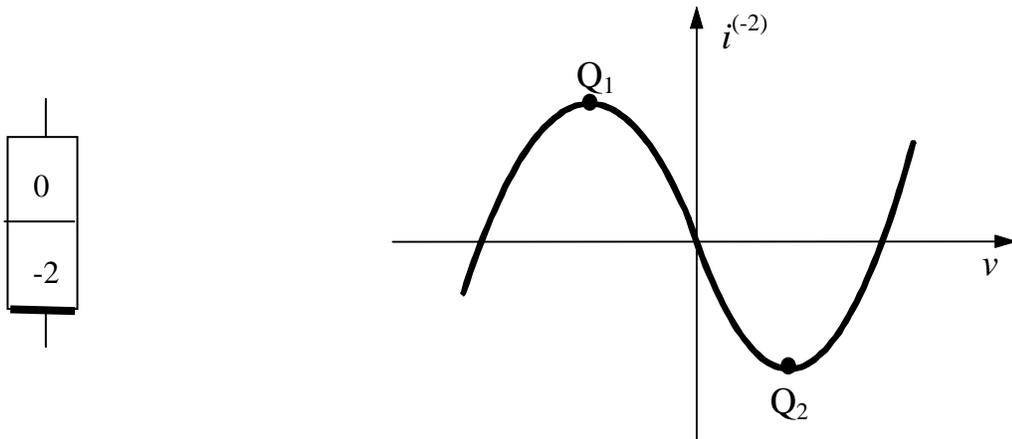
Si noti l'analogia di struttura con le equazioni ottenute nell' esempio precedente.

In entrambi gli esempi proposti, le equazioni di stato globali sono strutturate in modo da mantenere inclusa la variabile che è base di definizione per il componente non-lineare. Nel primo esempio essa è v_R , nel secondo esempio è v_C . In questo modo è possibile definire la derivata della caratteristica ($\frac{di_R}{dt}$ nel I esempio, $\frac{dq_C}{dt}$ nel II esempio) e comprendere che, in presenza dell'elemento "compensatore", non ci sono punti di impasse quando tale derivata si annulla (Q_1, Q_2). Si noti, confrontando le equazioni di stato, la corrispondenza strutturale e di ruolo fra la v_C del I esempio e la v del II esempio (variabili che individuano l'elemento compensatore).

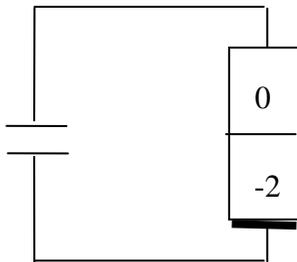
Come elementi non lineari per i punti di impasse abbiamo visto:



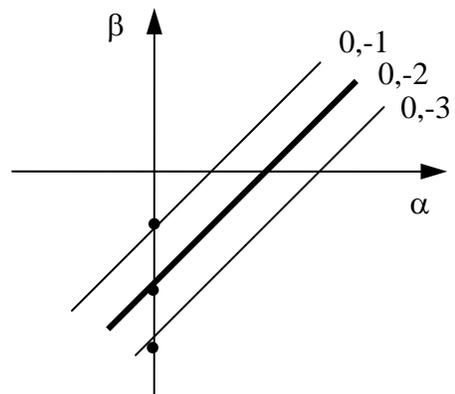
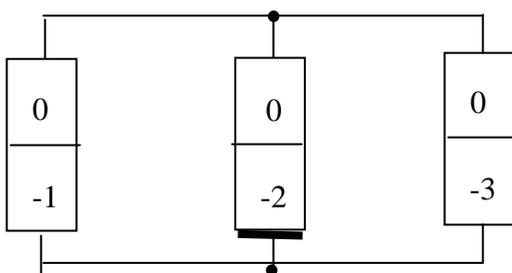
Consideriamo ora, come ulteriore esempio, un elemento:



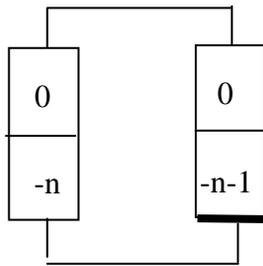
(la linearizzazione genererebbe una specie di resistore: $\beta - \alpha = -2$).
 Un circuito fatto con questo elemento e con un condensatore :



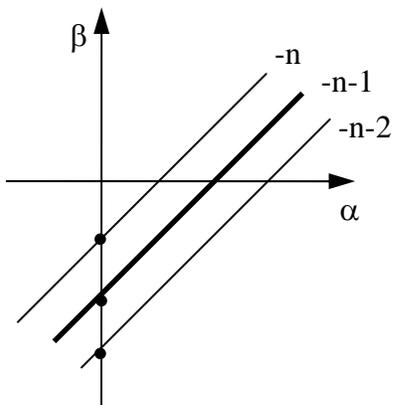
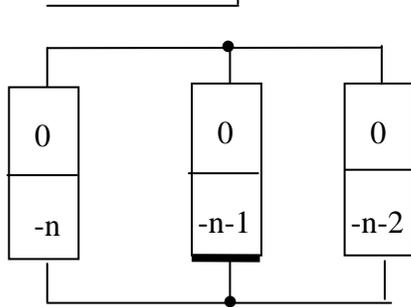
avrebbe punti di impasse in Q_1 , Q_2 . Essi possono essere rimossi (come si potrebbe verificare) includendo anche un elemento (0,-3) (nel caso più semplice, come sempre, tale elemento è lineare).



Dei tre esempi si deduce quanto segue:

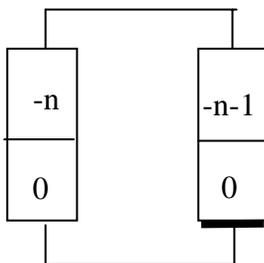


Ogni volta che questo elemento ha una caratteristica definita su base tensione NON MONOTONA, il circuito qui disegnato, che include un elemento $(0, -n)$, ha punti di impasse. Per rimuovere tali punti è necessario includere l'elemento di ordine superiore $(0, -n-2)$:

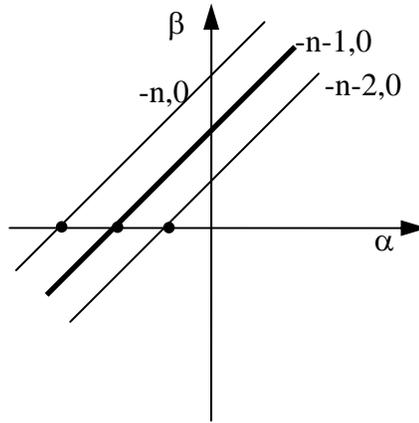
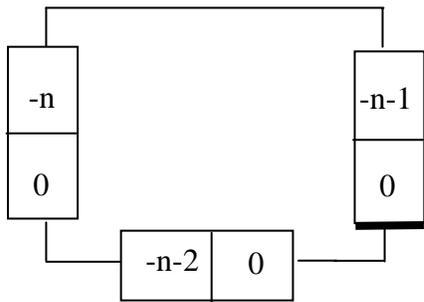


La regola è evidenziata, dal punto di vista topologico, dalla figura qui a fianco.

Dualmente:

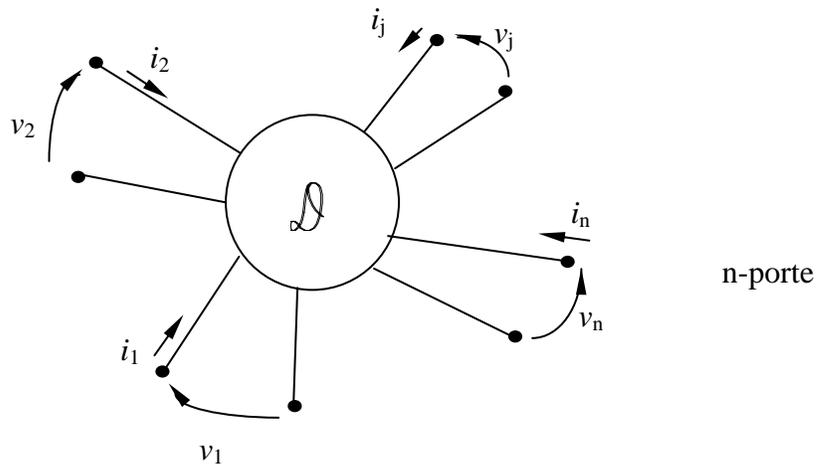
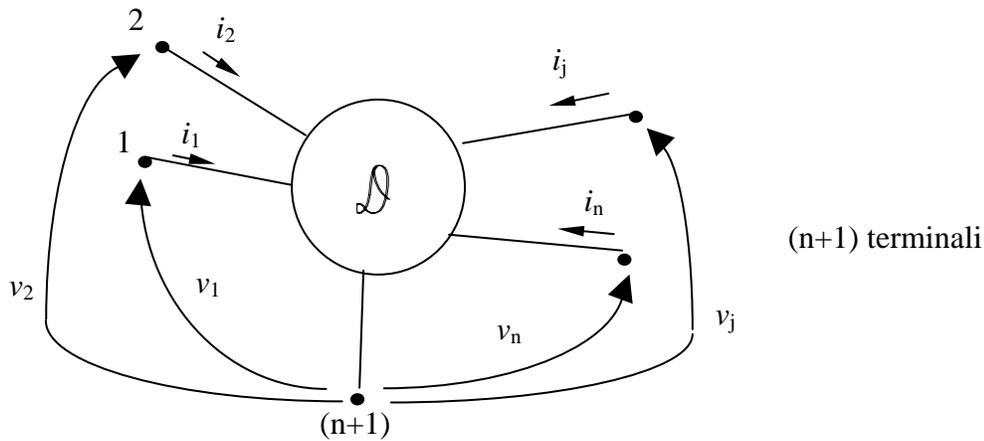


Se questo elemento è definito su base corrente da una caratteristica NON MONOTONA, il circuito qui disegnato, che include un elemento $(-n, 0)$, ha punti di impasse. Per rimuoverli è necessario includere (in serie) l'elemento di ordine superiore $(-n-2, 0)$:



Dispositivi e elementi multi-terminale e multiporta

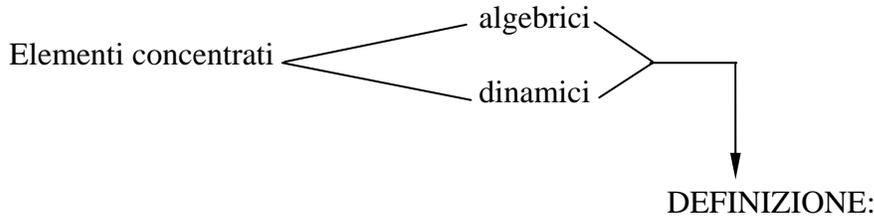
Si consideri un dispositivo a $(n+1)$ terminali o n -porte



in entrambi i casi, con la convenzione degli utilizzatori, si individua un vettore $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e un vettore $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$. Similmente al caso di dispositivo a 2 terminali si può pensare di ottenere le coppie ammissibili di vettori $(\underline{v}(t), \underline{i}(t))$ e di costruire così l'insieme $\mathcal{F}(\mathcal{D})$.

Dato un dispositivo a $(n+1)$ - terminali o n -porte non è in generale possibile costruire un modello che impieghi solo elementi a due terminali (si pensi, ad esempio, ai dispositivi non reciproci).

Gli elementi circuitali concentrati si raggruppano in due classi mutuamente esclusive:



“ un elemento concentrato a (n+1)-terminali o a n-porte si dice **ALGEBRICO** se e solo se la sua relazione costitutiva può essere espressa simbolicamente da relazioni algebriche che coinvolgono, per ciascuna porta j o per ciascun terminale j (j=1,...,n) in un (n+1)-terminali, al più due variabili dinamicamente indipendenti¹ $\{v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)}\}$.

L'elemento si dice **DINAMICO** se e solo se non è algebrico”.

Ogni coppia $\{v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)}\}$ di variabili dinamicamente indipendenti corrisponde ad un punto nel piano (α, β) (vedi capitolo *Elementi fondamentali a 2 terminali*). Simbolicamente, la relazione costitutiva di un ELEMENTO ALGEBRICO \mathcal{C} si può esprimere come:

$$f(\underline{\xi}, \underline{\eta}; t) = 0$$

dove $\underline{\xi}$ e $\underline{\eta}$ sono vettori a n dimensioni in cui $(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} (v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)}) \\ \text{oppure} \\ (i_j^{(\beta_j)}, v_j^{(\alpha_j)}) \end{cases} \quad (j=1, \dots, n)$

Per essere un elemento algebrico, dunque, la relazione costitutiva può coinvolgere al più 2 variabili per ogni terminale di un elemento a (n+1) terminali o ciascuna porta di un elemento a n-porte. Una variabile proviene dalla tensione tramite derivata o integrale multipli; l'altra variabile proviene dalla corrente con analoghe considerazioni.

L'espressione “al più” significa che la relazione costitutiva di un elemento algebrico può coinvolgere anche solo una variabile per ciascun terminale o porta:  esempio, 1 è un elemento algebrico a 2 terminali (n=1) descritto da $f(v) = v - 1 = 0$.

Questa definizione include le due seguenti come casi particolari.

1. Un elemento \mathcal{C} a (n+1) terminali o a n-porte definito da una relazione costitutiva che coinvolge solo le due variabili $v^{(\alpha)}$ e $i^{(\beta)}$ si dice elemento $v^{(\alpha)} - i^{(\beta)}$.
2. Un elemento \mathcal{C} a (n+1) terminali o a n-porte è un resistore, un induttore, un condensatore, un memristor se e solo se la sua relazione costitutiva può essere scritta tramite una RELAZIONE ALGEBRICA, espressa simbolicamente come

$$f_R(v, i; t) = 0 \quad f_L(\phi, i; t) = 0 \quad f_C(q, v; t) = 0 \quad f_M(\phi, q; t) = 0$$

¹ Per la nozione di variabili dinamicamente indipendenti vedi *Elementi fondamentali a 2 terminali*.

rispettivamente.

R, L, C e memristor sono i più semplici elementi algebrici fra gli infiniti che si possono concepire: essi verranno denominati, d'ora in poi, ELEMENTI ALGEBRICI FONDAMENTALI. Gli altri saranno indicati come elementi algebrici misti e di ordine superiore.

ELEM. ALGEBRICI MISTI E DI ORDINE SUP.

$$\underline{f}(\underline{v}_1(\alpha_1), \underline{i}_1(\beta_1), \underline{v}_2(\alpha_2), \underline{i}_2(\beta_2), \dots, \dots, \underline{v}_n(\alpha_n), \underline{i}_n(\beta_n); t) = \underline{0}$$

OVVERO:

$$\underline{f}(\underline{\xi}, \underline{\eta}; t) = \underline{0}$$

$$\text{se } \begin{cases} \alpha_j = \alpha + v_j \\ \beta_j = \beta + i_j \end{cases}$$

$$\underline{f}(\underline{v}(\alpha), \underline{i}(\beta), t) = 0$$

ELEM. ALG. DI
ORDINE SUPERIORE
($\underline{v}(\alpha), \underline{i}(\beta)$)

ELEM. ALG.
FONDAMENTALI

α	β
0	0
-1	0
0	-1
-1	-1

$$\underline{f}_R(\underline{v}, \underline{i}; t) = 0$$

$$\underline{f}_L(\underline{\phi}, \underline{i}; t) = 0$$

$$\underline{f}_C(\underline{v}, \underline{q}; t) = 0$$

$$\underline{f}_M(\underline{\phi}, \underline{q}; t) = 0$$

Nella formulazione generale, la relazione algebrica $f(\underline{\xi}, \underline{\eta}; t)$ non è necessariamente data in forma analitica chiusa. Nella maggior parte dei casi \mathcal{C} è descritto implicitamente per mezzo di un sistema di $(n+m)$ equazioni tempo-varianti, algebriche e indipendenti ($m \leq n$):

$$\begin{aligned} \underline{f}_a(\underline{\xi}, \underline{\eta}; \underline{x}) &= \underline{0} && \leftarrow \text{vettore di dimensione } n \\ \underline{f}_b(\underline{\xi}, \underline{\eta}; \underline{x}) &= \underline{0} && \leftarrow \text{vettore di dimensione } m \\ x &\in X \subset \mathfrak{R}^m \end{aligned}$$

con f_a, f_b funzioni vettoriali a n e m dimensioni di $\underline{\xi}, \underline{\eta}, \underline{x}$ tali che, per $\forall \underline{x}_0 \in X, \exists$ almeno una soluzione

$$\underline{\xi} = \hat{\underline{\xi}}(\underline{x}_0), \quad \underline{\eta} = \hat{\underline{\eta}}(\underline{x}_0).$$

– Nel caso particolare di unicità della soluzione:

$\hat{\underline{\xi}}(\underline{x}), \hat{\underline{\eta}}(\underline{x}) \forall \underline{x} \in X \subset \mathfrak{R}^m$ la relazione costitutiva può essere descritta esplicitamente dalla coppia di EQUAZIONI VETTORIALI PARAMETRICHE

$$\underline{\xi} = \hat{\underline{\xi}}(\underline{x}), \quad \underline{\eta} = \hat{\underline{\eta}}(\underline{x}) \text{ e } m=n.$$

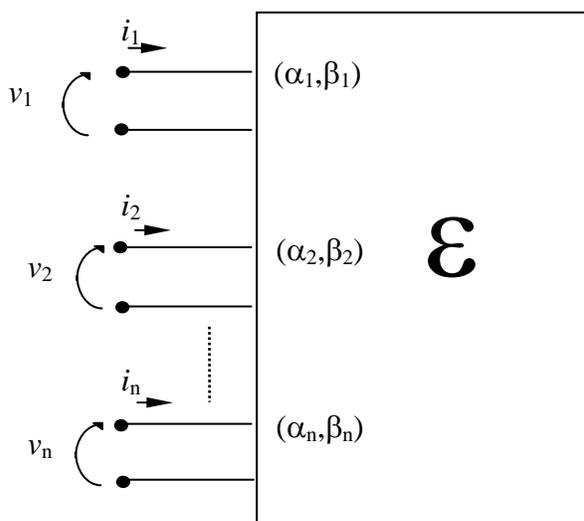
– Se $\hat{\underline{\xi}}(\cdot)$ è BIGETTIVA ($\Rightarrow \exists$ la funzione inversa $\underline{x} = \hat{\underline{x}}(\underline{\xi})$), le equazioni costitutive si possono rimpiazzare con l'unica equazione $\underline{\eta} = \hat{\underline{\eta}}(\hat{\underline{x}}(\underline{\xi})) = \hat{\underline{\eta}}(\underline{\xi}) \quad \underline{\xi} \in \mathfrak{R}^n$ e l'elemento algebrico \mathcal{C} è definito su base $\underline{\xi}$.

– Analogamente se $\hat{\underline{\eta}}(\cdot)$ è BIGETTIVA si giunge alla singola equazione

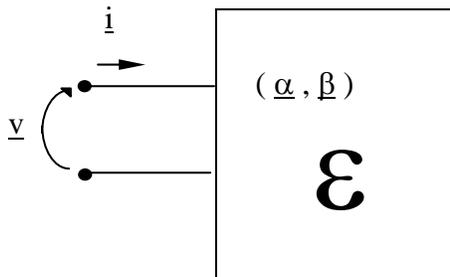
$$\underline{\xi} = \hat{\underline{\xi}}(\hat{\underline{x}}(\underline{\eta})) = \hat{\underline{\xi}}(\underline{\eta}) \quad \underline{\eta} \in \mathfrak{R}^n \text{ e l'elemento } \mathcal{C} \text{ è definito su base } \underline{\eta}.$$

Ciò che è stato detto riguarda indipendentemente un n -porte o un $(n+1)$ -terminali.

Per brevità, d'ora in poi, si userà il termine “ n -porte”, e si indicherà ciascun tipo di elemento algebrico \mathcal{C} con il simbolo:

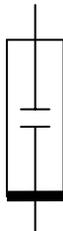


oppure con il suo abbreviato:



Un elemento concentrato \mathcal{E} è dinamico se e solo se non può essere espresso da una relazione costitutiva che coinvolge “al più” 2 variabili $(v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)})$ per ogni porta j .

Per esempio l'elemento:



se descritto con l'equazione $i = C(v) \frac{dv}{dt}$ sembra coinvolgere $i, v, v^{(1)}$. Comunque, questa relazione può essere posta nella forma $q = \hat{q}(v)$, con $C(v) \triangleq \frac{d\hat{q}(v)}{dv} \Rightarrow$ il condensatore, anche non lineare, è un elemento ALGEBRICO.

La definizione di elemento algebrico è analoga (anche se non identica) alla definizione di SISTEMA OLONOMO in meccanica classica.

Ricordiamo che un sistema di particelle si dice olonoma se queste non sono soggette a vincoli differenziali non integrabili. Perciò è olonoma ogni sistema soggetto a vincoli finiti o differenziali ma integrabili. Tutti i vincoli di un sistema olonoma si possono scrivere in forma chiusa.

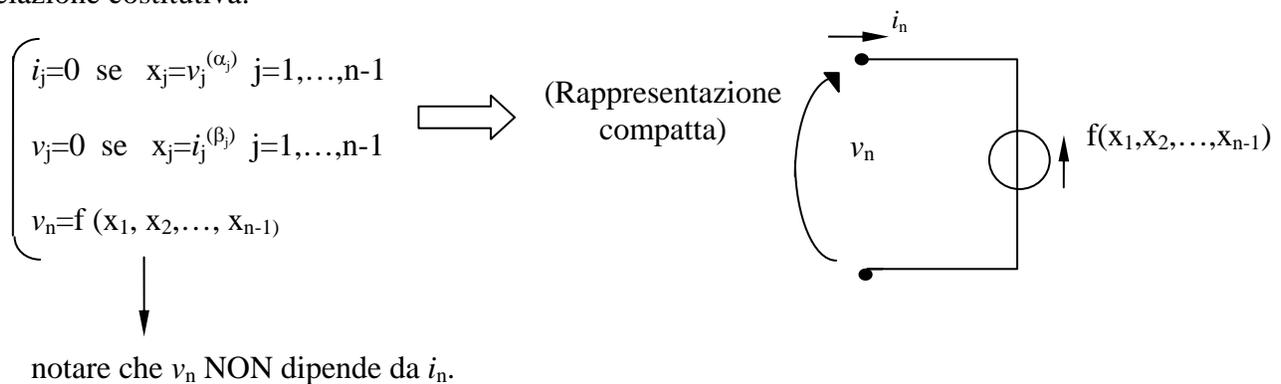
Il termine matematico “ALGEBRICO” sostituisce numerosi nomi più “fisici” quali: “statico”, “olonoma”, “istantaneo”, “senza rumore”. Nessuno di essi è immune da obiezioni. Invece il nome “algebrico” evidenzia l'idea centrale del metodo di classificazione : gli elementi algebrici implicano solo operazioni algebriche tra due variabili dinamicamente indipendenti per ciascuna porta.

Esempi di n-porte algebrici

Gli esempi riportati qui di seguito tengono conto del fatto che porte differenti possono avere combinazioni differenti di variabili di porta $\{v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)}\}$; si tratta quindi di esempi più generali di quelli in cui le variabili alle porte sono coinvolte tutte con lo stesso α e lo stesso β (es: n-porte resistivo: $\underline{\alpha} = \underline{0}$, $\underline{\beta} = \underline{0}$; n-porte induttivo : $\underline{\alpha} = -\underline{1}$, $\underline{\beta} = \underline{0}$; n-porte capacitivo: $\underline{\alpha} = \underline{0}$, $\underline{\beta} = -\underline{1}$; n-porte memristivo $\underline{\alpha} = -\underline{1}$, $\underline{\beta} = -\underline{1}$; n porte di ordine superiore $\underline{\alpha} = \alpha \underline{1}$; $\underline{\beta} = \beta \underline{1}$)

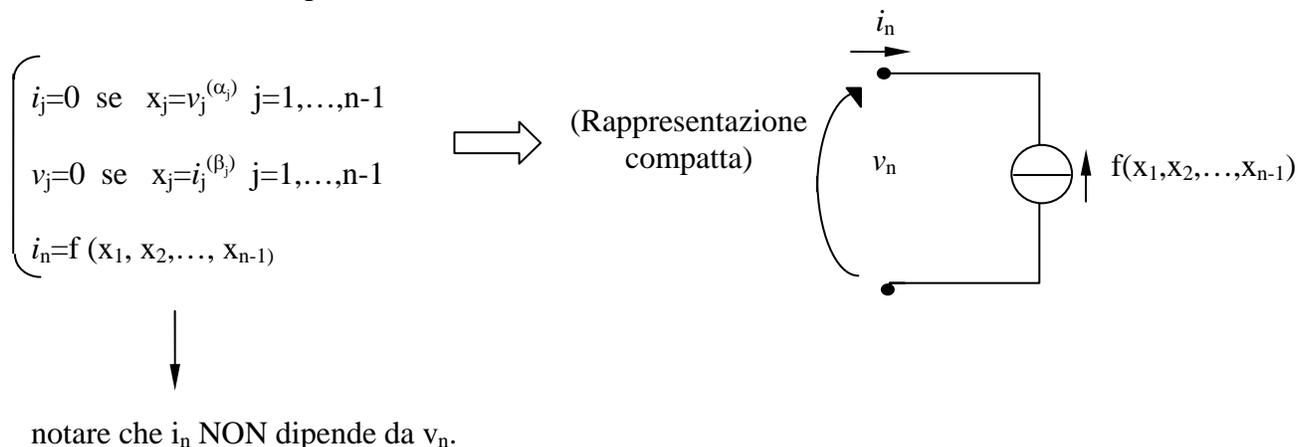
Generatori pilotati

L'elemento n-porte algebrico \mathcal{C} si dice generatore di tensione \underline{x} -pilotato se e solo se è descritto dalla relazione costitutiva:



Analogamente:

Generatore di corrente \underline{x} -pilotato:



NOTA: in entrambi i generatori pilotati, ciascuna variabile x_j pilotante può essere $v_j^{(\alpha_j)}$ o $i_j^{(\beta_j)}$, dove α_j e β_j sono interi positivi o negativi. Perciò l'insieme dei generatori pilotati classici va visto come un sottoinsieme dell'insieme generale.

NOTA: i generatori pilotati sono componenti INDISPENSABILI per la modellistica e la sintesi di reti non lineari.

Rotatori, riflettori

Sono 2-porte lineari algebrici

Premesse matematiche : operatori (matrici)
ORTOGONALI

$(P_x, P_y) = (x, y)$ conserva. prodotto
scalare (spazio Euclideo
reale)

P ortogonale $\Leftrightarrow P^* = P^{-1}$ ($P^*P = I$)
↑
op. aggiunto

se P è una matrice : $P^T = P^{-1}$

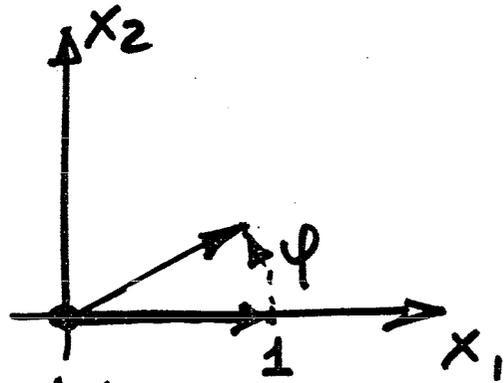
Nello spazio euclideo a 2 dimensioni
distinguiamo

matrici ortogonali: $\left\{ \begin{array}{l} \text{proprie } P_+ \text{ (det. } P_+ = +1) \\ \text{improprie } P_- \text{ (det. } P_- = -1) \end{array} \right.$

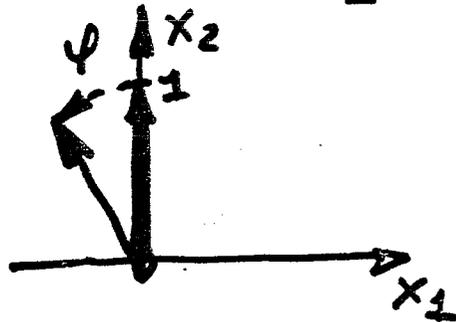
$$P_{\pm} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \pm \sin \varphi & \pm \cos \varphi \end{bmatrix}$$

P_+ effettua una rotazione

$$P_+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow$$



$$P_+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow$$



$P_- = Q P_+$ con $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ oltre

alla rotazione dovuta a P_+ si ottiene una riflessione dovuta a Q

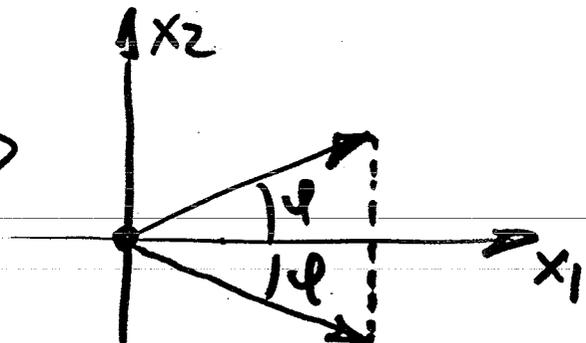
$$Q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

l'asse orizzontale resta "fermo"

$$Q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

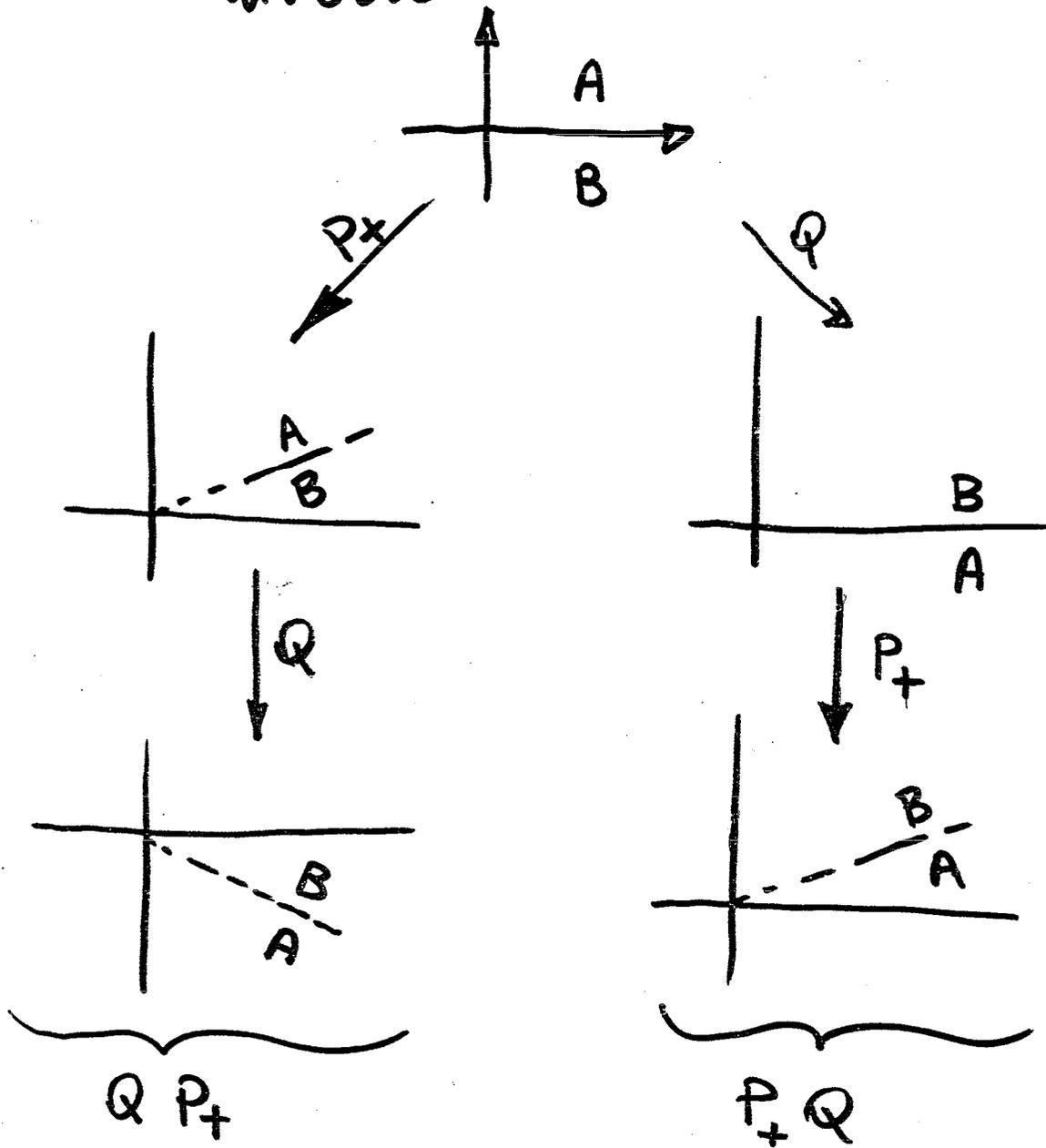
l'asse verticale viene "riflesso"

$$Q \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow$$



NOTA: $-Q$ dà una rifl. rispetto all'asse vert

Nota: una matrice impropria si può ottenere anche da $P_+ Q$. In questo caso il risultato è diverso

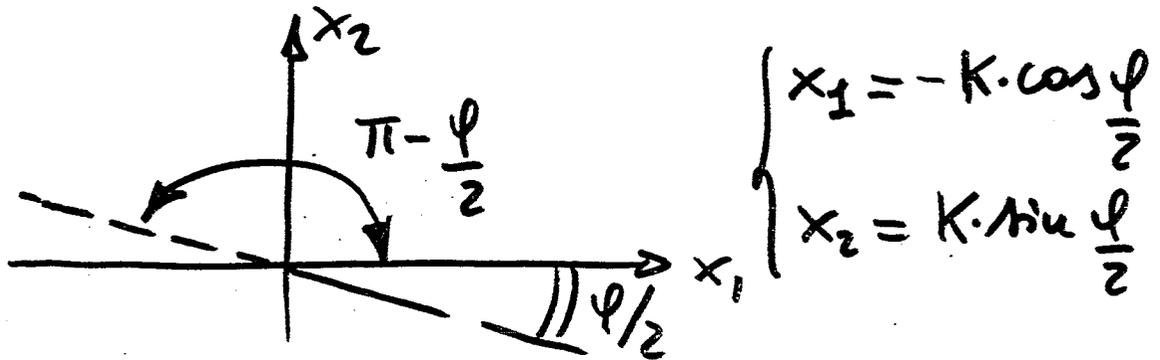


Asse di riflessione di una matrice
impropria P_- individuato da:

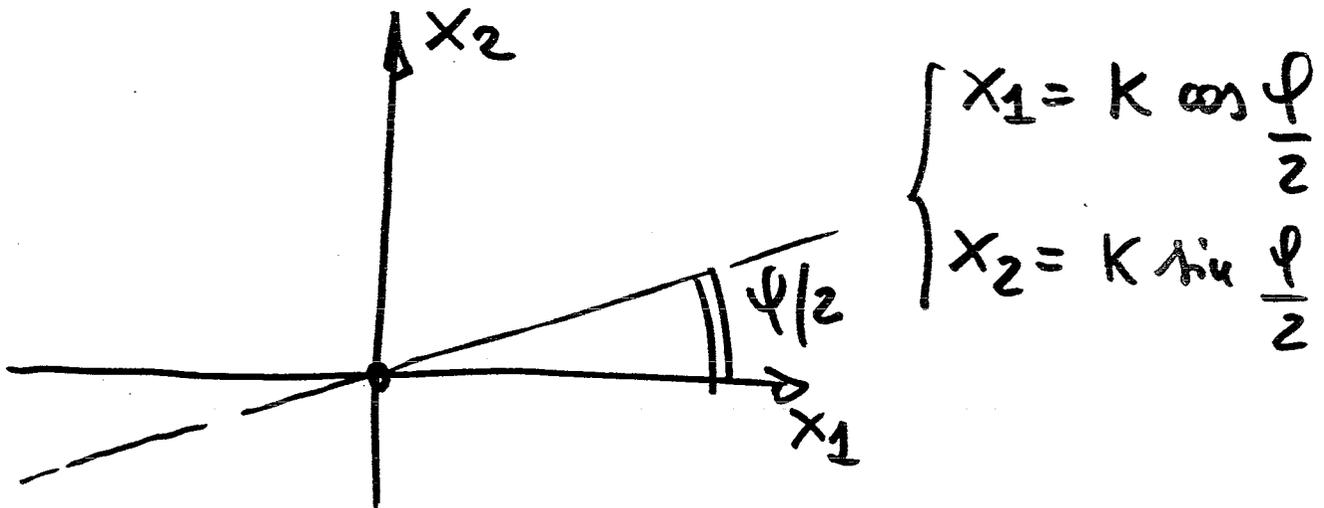
$$P_- \underline{x} = \underline{x} \quad (*)$$

ma $P_+ = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$. Per $P_- = Q P_+$ la

relazione (*) dà come asse di riflessione:



Per $P_- = P_+ Q$ si ottiene invece
l'asse di riflessione:

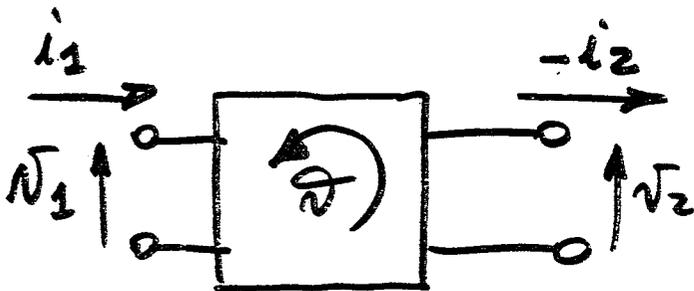


questi risultati coincidono con quelli
(qualitativi) della pag. precedente

Rotatore : impiega una matrice ortogonale propria P_+ . Essa opera su variabili dimensionalmente omogenee \Rightarrow rispetto a (v, i) occorre introdurre una trasformaz.

lineare:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad ([R]: \Omega)$$



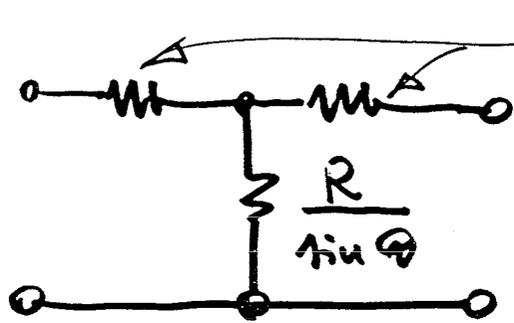
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = P_+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -R \sin \vartheta \\ \frac{\sin \vartheta}{R} & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

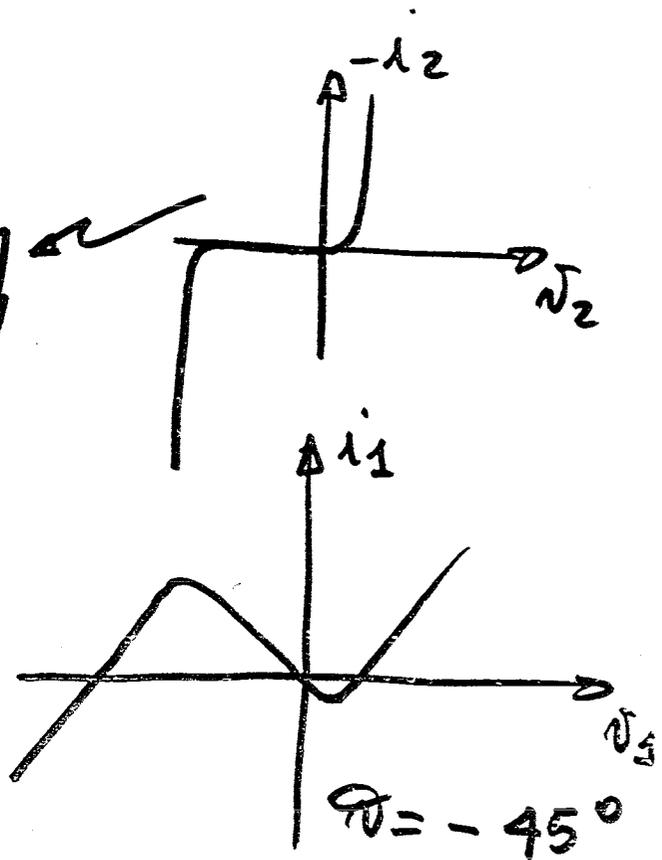
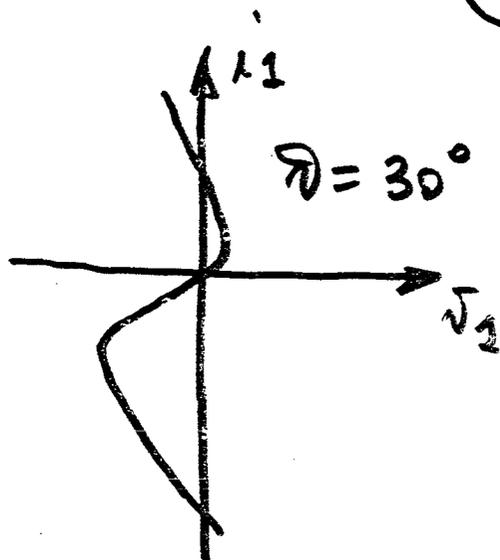
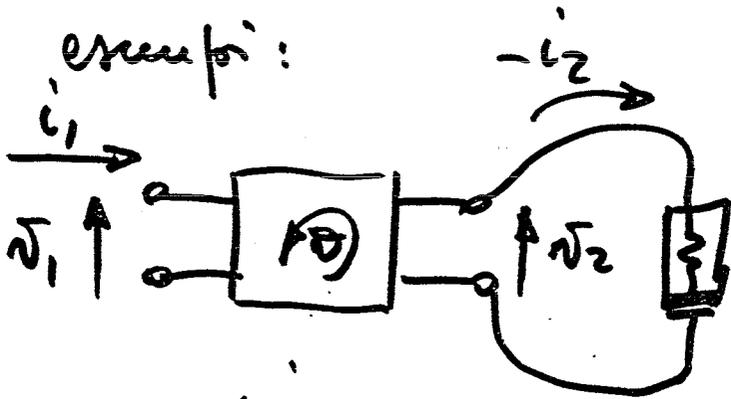
matrice di trasn. $[T]$

$\det [T] = 1 \Rightarrow$ reciprocità alle porte \Rightarrow
 \Rightarrow sintetizzabilità con
 soli BIPOLI (resistivi)



$$-R \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$$

esempio di rotatori del rotatore



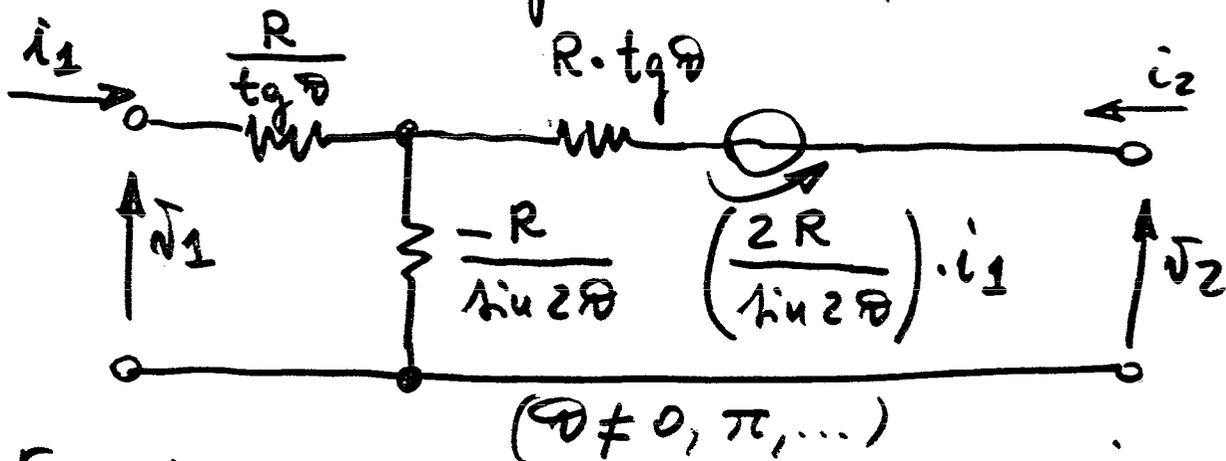
Riflettore

con le stesse transf. lineari e con ϑ come angolo per l'asse di riflessione, si ottiene:

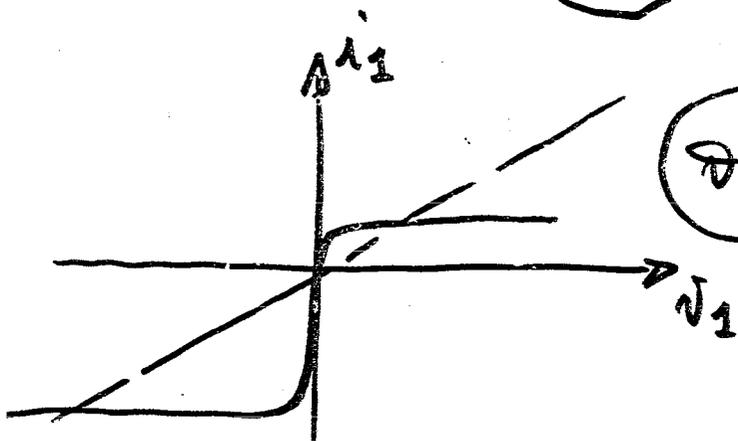
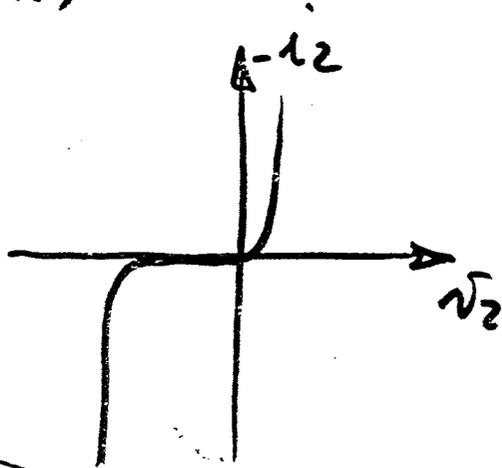
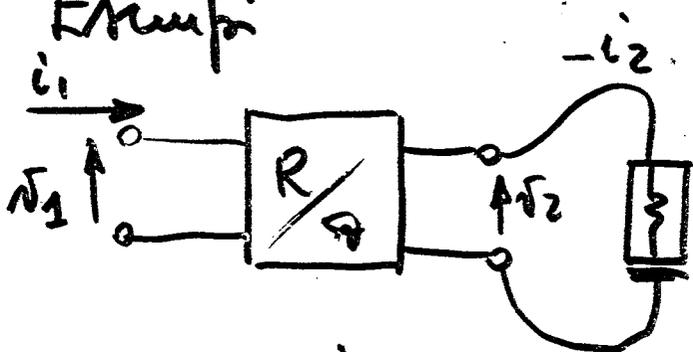
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\vartheta & R \sin 2\vartheta \\ \frac{\sin 2\vartheta}{R} & -\cos 2\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

determinante = -1 \Rightarrow NON reciproco

Una possibile sintesi (che richiede evidentemente generatori pilotati) è



Esempi



$\varphi = 45^\circ$

scambio di
beni di def.

III
GIRATORE:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 1/R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

Per $\varphi = 90^\circ$ (riflessione risp. axe verticale)



$$v_1 = -v_2 \quad i_1 = -i_2$$

Voltage inversion negative
impedance converter / VNIC

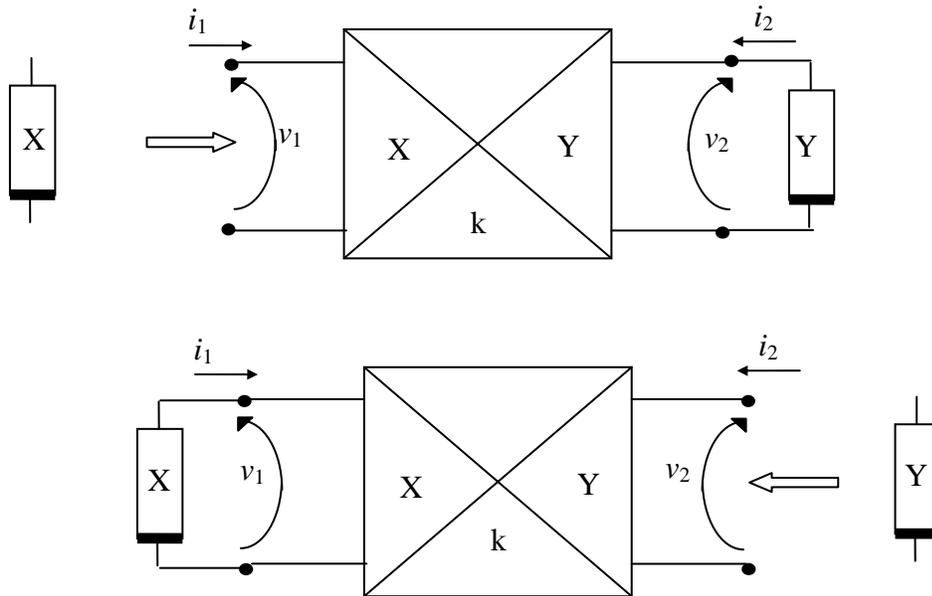
Per $\varphi = 180^\circ$ (riflessione risp. axe orizzontale)

$$v_1 = v_2; \quad i_1 = +i_2 \quad \text{INIC}$$

Mutatori

Sono 2-porte lineari algebrici (includono, come caso particolare, il giratore):

Le proprietà di un mutatore X-Y sono riassunte nella figura:



$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ e } Y \text{ possono essere } L, R, C, \text{ Memristor} \Rightarrow 6 \text{ possibili coppie} \\ k=1, 2 \text{ definisce il "tipo": tipo 1 o tipo 2 (v. sotto)} \end{array} \right. \rightarrow 12 \text{ Possibilità}$

per un mutatore L-R si ha

- tipo 1 $\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = T v_2 \\ i_1 = -i_2 \end{array} \right.$
- tipo 2 $\left\{ \begin{array}{l} \phi_1 = -L i_2 \\ i_1 = (1/R) v_2 \end{array} \right.$

per un mutatore C-R si ha

- tipo 1 $\left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_2 \\ q_1 = -T i_2 \end{array} \right.$
- tipo 2 $\left\{ \begin{array}{l} v_1 = -R i_2 \\ q_1 = C v_2 \end{array} \right.$

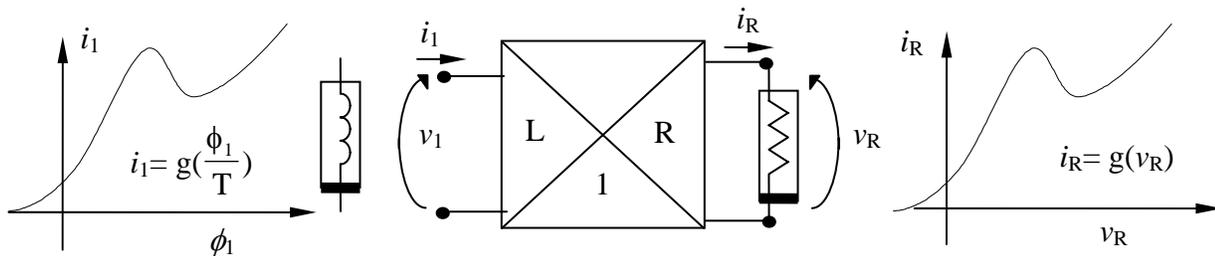
$\left. \vphantom{\int} \right\}$

per un mutatore L-C si ha

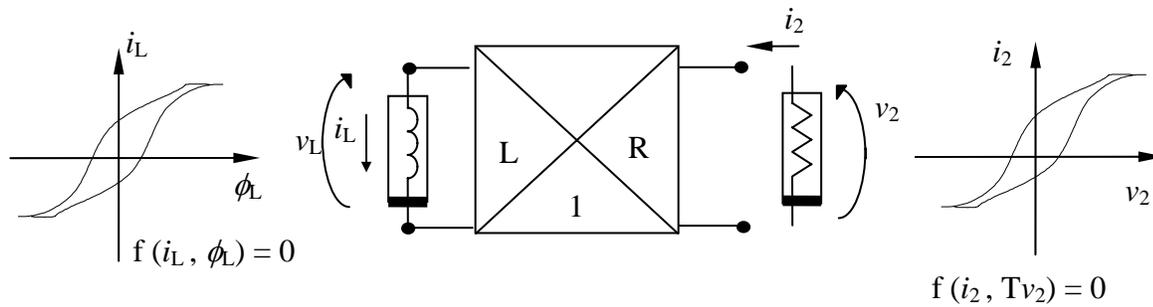
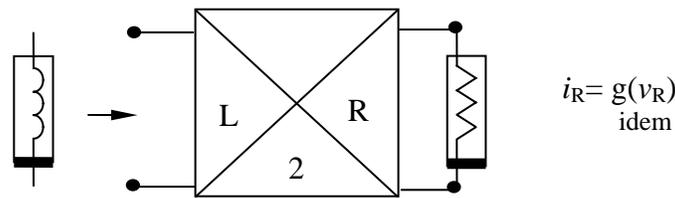
- tipo 1 $\begin{cases} \phi_1 = T v_2 \\ i_1 = -(1/T) q_2 \end{cases}$
- tipo 2 $\begin{cases} \phi_1 = -R q_2 \\ i_1 = (1/R) v_2 \end{cases}$ (giratore)

eccetera.

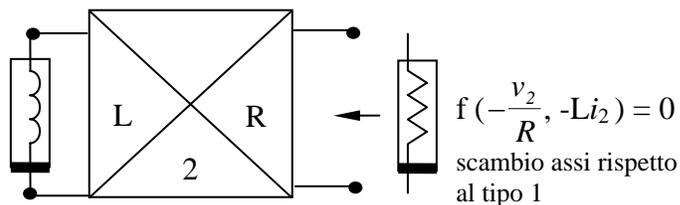
Come esempi di applicazione, vediamo i mutatori L-R di tipo 1 e 2 in due situazioni distinte:



$\phi_1 = L \cdot g(R i_1)$
 scambio assi rispetto
 al tipo 1
 (base corrente)



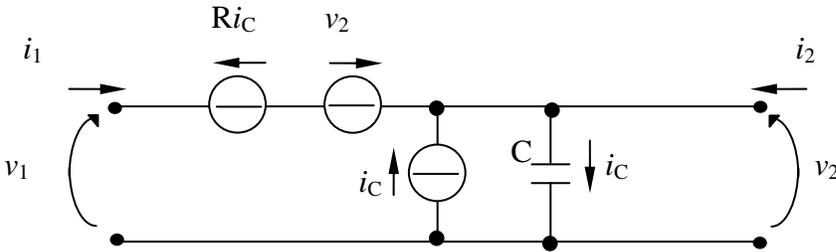
idem
 $f(i_L, \phi_L) = 0$



NOTA: impiegando i vari mutatori è possibile sintetizzare qualunque terna presa dai 4 elementi circuitali fondamentali a due terminali, dato il quarto elemento.

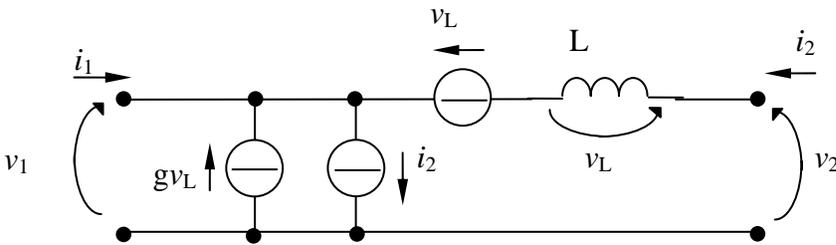
NOTA: siccome i mutatori sono due-porte algebrici e LINEARI, si possono realizzare impiegando SOLO L, C e generatori pilotati LINEARI. Per esempio:

MUTATORE L-R tipo 1



$$\begin{cases} v_1 = (RC) \frac{dv_2}{dt} \\ i_1 = -i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = (RC)v_2 \\ i_1 = -i_2 \end{cases}$$

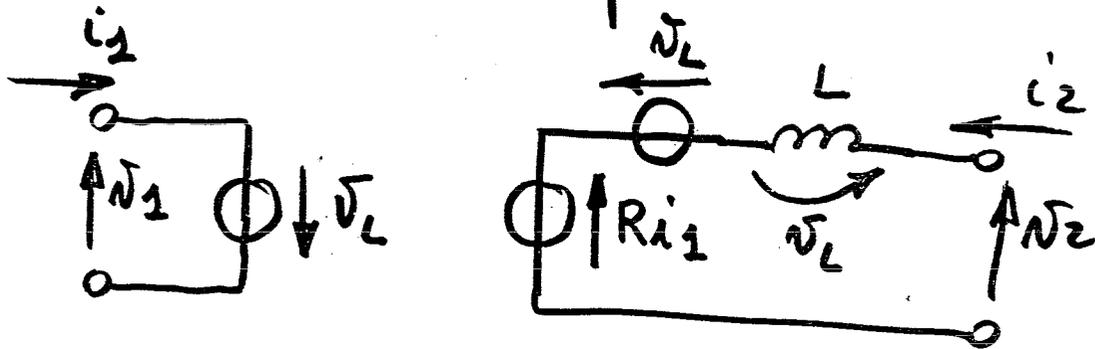
MUTATORE C-R tipo 1



$$\begin{cases} v_2 = v_1 \\ i_1 = -gL \frac{di_2}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 \\ q_1 = -(gL)i_2 \end{cases}$$

NOTA: mutatori di ordine superiore si possono definire e realizzare, analogamente, impiegando solo elementi lineari. Perciò tutti gli elementi a due terminali con α e β generici si possono sintetizzare usando solo R, L, C lineari, diodi, transistori e amplificatori operazionali.

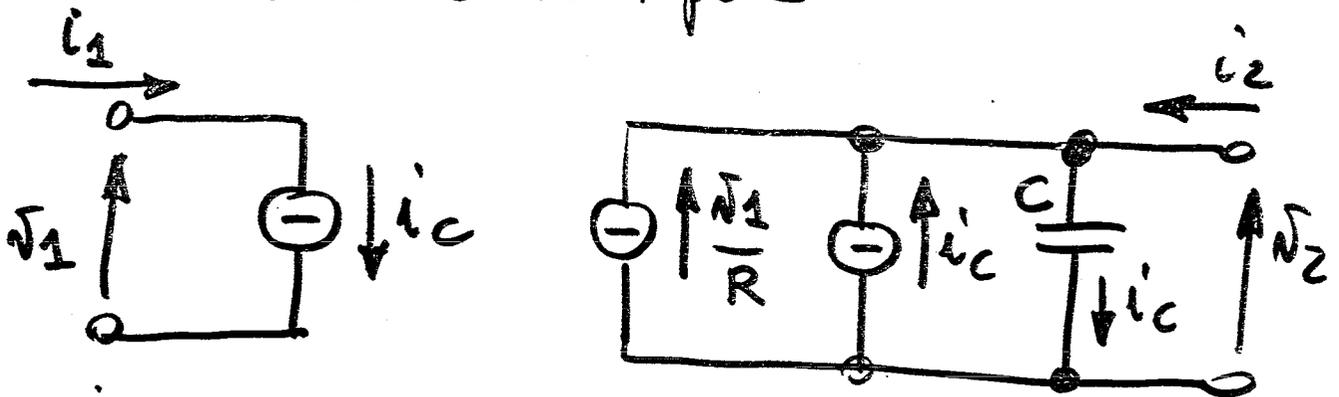
Mutatore L-R tipo 2



$$\dot{N}_1 = -\dot{N}_L = -L \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \phi_1 = -L i_2$$

$$\dot{N}_2 = R i_1$$

Mutatore C-R tipo 2

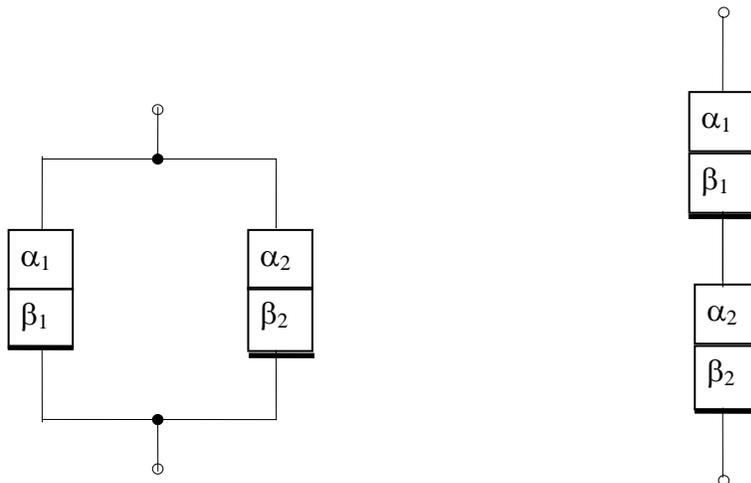


$$i_1 = i_c = C \frac{d\dot{N}_2}{dt} \Rightarrow q_1 = C \dot{N}_2$$

$$i_2 = -\frac{\dot{N}_1}{R} \Rightarrow \dot{N}_1 = -R i_2$$

Collegamento di multiporte algebrici

Il collegamento arbitrario di multiporte algebrici NON dà necessariamente origine ad un altro multiporta algebrico. Ad esempio, in generale ogni bipolo contenente due o più elementi non lineari con coppie (α, β) diverse NON è algebrico:



per $(\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)$

bipoli risultanti in generale non algebrici

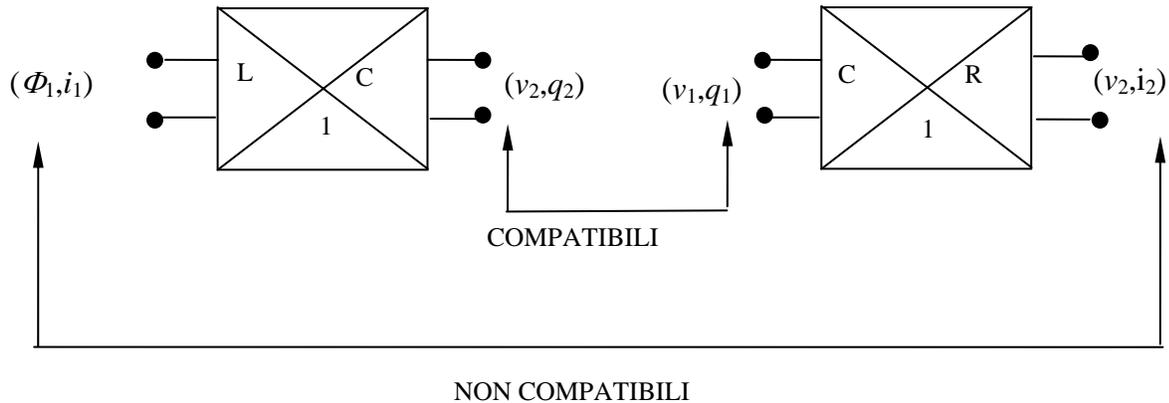
Per capire se esiste o meno una proprietà di chiusura per i collegamenti è necessario introdurre il concetto di COLLEGAMENTI COMPATIBILI.

Definizione: una porta “j” e una porta “k” (di uno stesso multiporta \mathcal{C} algebrico o di due distinti multiporta $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ algebrici) si dicono compatibili se e solo se le rispettive variabili di porta

$$\begin{matrix} (v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)}) \\ (v_k^{(\alpha_k)}, i_k^{(\beta_k)}) \end{matrix} \quad \text{hanno} \quad \alpha_j = \alpha_k \quad \beta_j = \beta_k$$

Grossolanamente si può dire che, se si colora ogni porta con un colore corrispondente ad una particolare combinazione $(v_j^{(\alpha_j)}, i_j^{(\beta_j)})$ di variabili di porta, due porte sono compatibili se e solo se sono colorate allo stesso modo.

Ad esempio, per questi mutatori



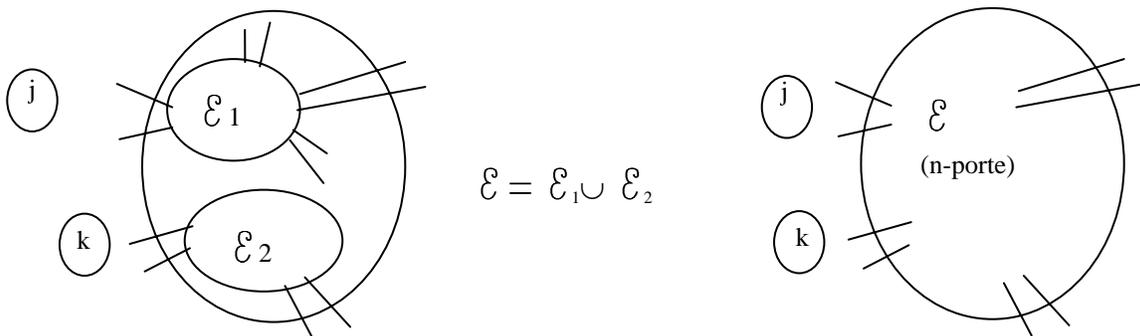
TEOREMA I (proprietà di chiusura per i collegamenti di multiporte algebrici):
 connessioni compatibili fra porte di un multiporta algebrico o fra porte di due o più multiporte algebrici danno sempre luogo ad un multiporta algebrico. Ciascuna delle porte risultanti ha la stessa coppia di variabili dinamicamente indipendenti associate alle porte dei multiporta da cui proviene.

Dimostrazione.

Senza perdere in generalità, si considerino le porte j e k appartenenti ad uno stesso

n -porte algebrico \mathcal{E} . Tale n -porte può anche provenire dall'unione di altri elementi multiporta: in

figura $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.



La relazione costitutiva di \mathcal{E} si può scrivere come:

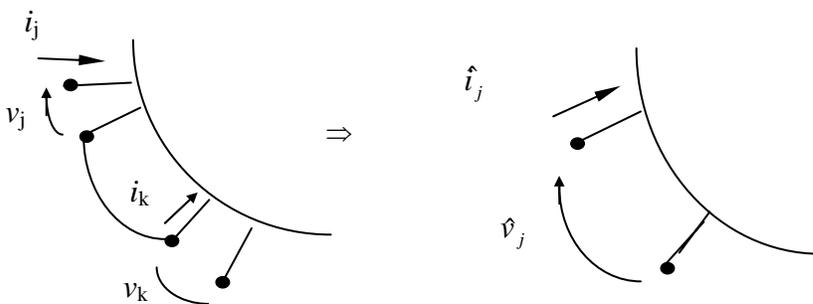
$$f_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_j, \dots, \eta_k, \dots, \eta_n; t) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

supponiamo si collegare in serie le porte j e k compatibili formando una porta con

$$\hat{v}_j = v_j + v_k$$

$$\hat{i}_j = i_j = i_k$$

ora,
$$\begin{cases} \xi_j = v_j^{(\alpha_j)}; & \eta_j = i_j^{(\beta_j)} \\ \xi_k = v_k^{(\alpha_k)}; & \eta_k = i_k^{(\beta_k)} \end{cases}$$



con
$$\begin{cases} \alpha_j = \alpha_k = \alpha \\ \beta_j = \beta_k = \beta \end{cases}$$
 per ipotesi di compatibilità tra le due porte

se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ si ha

$$v_j^{(\alpha)} + v_k^{(\alpha)} + c_1 = \xi_j + \xi_k + c_1 \stackrel{DEF}{=} \hat{\xi}_j + c_1$$

$$i_j^{(\beta)} + c_2 = \eta_j + c_2 \stackrel{DEF}{=} \hat{\eta}_j + c_2$$

$$i_k^{(\beta)} + c_3 = \eta_k + c_3 \stackrel{DEF}{=} \hat{\eta}_k + c_3$$

Gli altri termini (polinomio con potenze di $(t-t_0)$ fino al grado $-\alpha-1$) sono nulli se si prende $t_0 = -\infty$

mentre se α e/o β sono positivi le rispettive costanti sono nulle.

Allora le

$$\left[\begin{array}{l} f_i(\quad ; \quad ; t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \xi_j + \xi_k = \hat{\xi}_j \\ \eta_j = \hat{\eta}_j \\ \eta_k = \hat{\eta}_j \end{array} \right]$$

sono in totale $n+3$ equazioni in

$$\begin{array}{l} \xi_1 \dots \xi_n; \eta_1 \dots \eta_n \\ \hat{\xi}_i, \hat{\eta}_j \\ \hline (2n + 2) \text{ variabili} \end{array}$$

Delle $n+3$ equazioni si possono usare le ultime tre e una delle $f_i(\dots)=0$ per eliminare formalmente le 4 variabili di porta “vecchie” $\xi_j, \xi_k, \eta_j, \eta_k$, e restare con $(n-1)$ equazioni nelle $2(n-1)$ variabili:

$$\left(\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}_{n-2}; \underbrace{\eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \dots, \eta_{k-1}, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n}_{n-2}; \underbrace{\hat{\xi}_j, \hat{\eta}_j}_2; t \right)$$

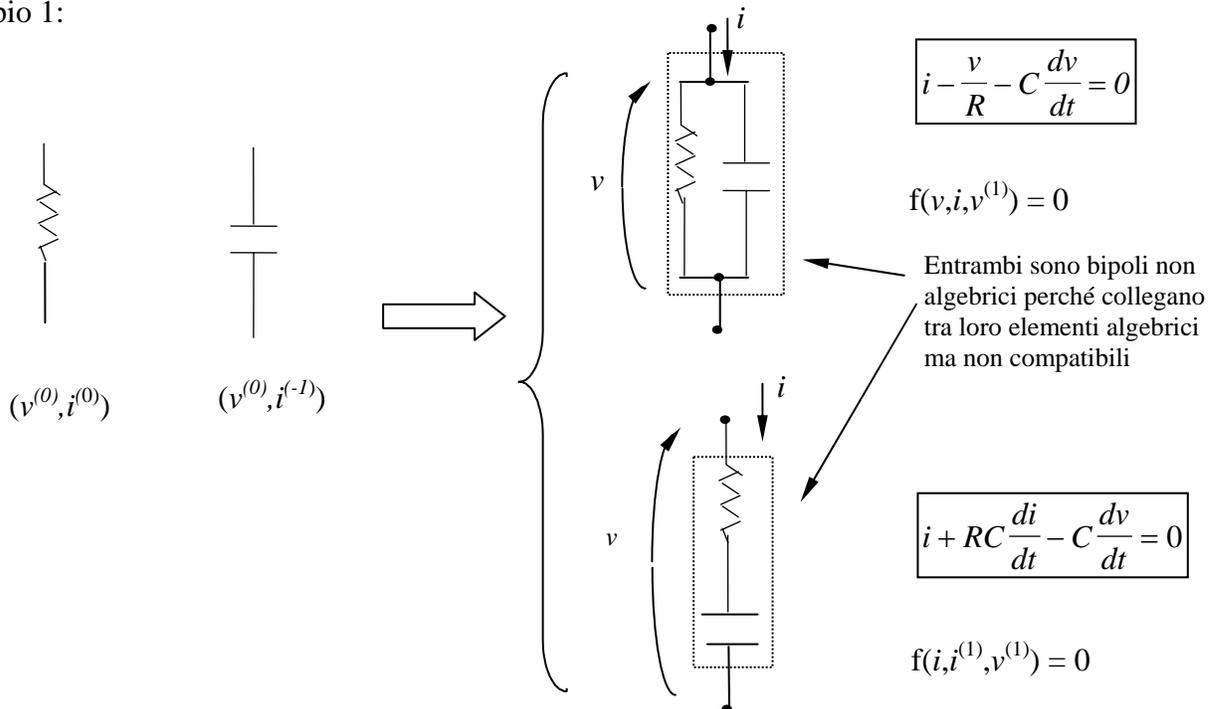
questo prova che il $(n-1)$ porte risultante è un n -porte algebrico in cui la nuova porta è ancora associata a $(\hat{\xi}_j, \hat{\eta}_j) = (\hat{v}_j^{(\alpha)}, \hat{i}_j^{(\beta)})$

Se le porte j e k si collegano in parallelo, la dimostrazione si imposta in modo duale.

Alcune riflessioni sulle connessioni compatibili e non compatibili.

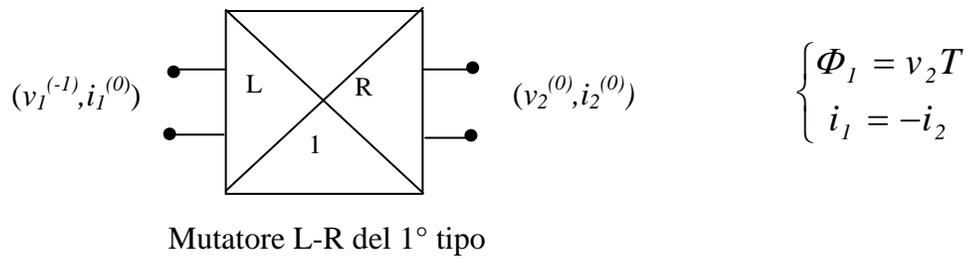
Collegamenti non compatibili fra elementi algebrici danno luogo, in generale, a elementi non algebrici. Ciò è ben evidenziabile anche facendo riferimento a elementi lineari, come quelli degli esempi qui proposti.

Esempio 1:

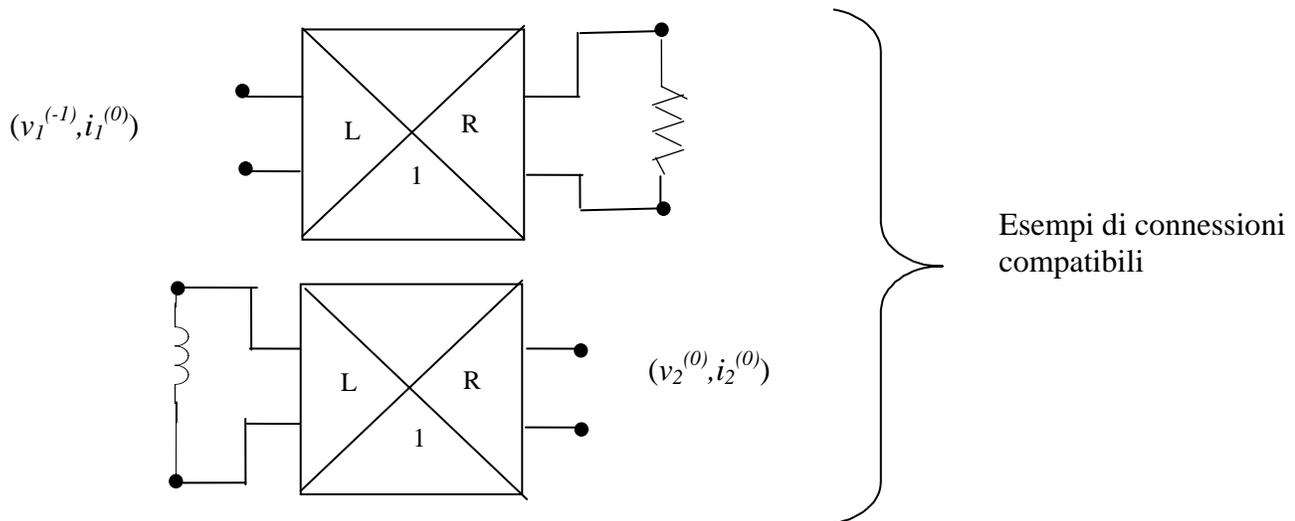


Esempio 2:

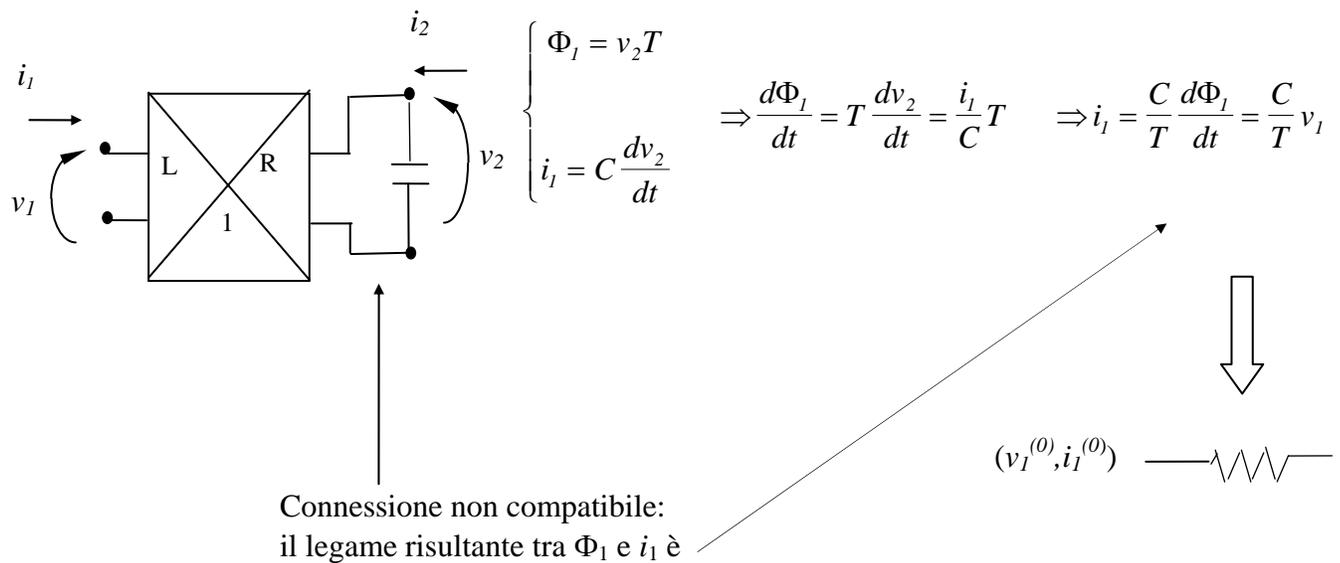
Considerando il mutatore L-R del 1° tipo



ecco due casi di connessioni compatibili



Ecco ora un esempio di connessione non compatibile:



Questo risultato contraddice le aspettative: il bipolo risultante alla prima porta è un elemento algebrico (un resistore!) nonostante la seconda porta sia connessa ad un elemento non compatibile. Ricordiamo però che la compatibilità delle connessioni nel Teorema I è condizione *sufficiente*, ma non necessaria, per avere un legame algebrico fra le grandezze di porta risultanti.

TEOREMA II (Realizzabilità di un multiporta algebrico)
 Ogni n-porte algebrico si può sintetizzare impiegando soltanto:
 { MUTATORI
 Un n-porte resistivo (in generale non lineare)

Dimostrazione.

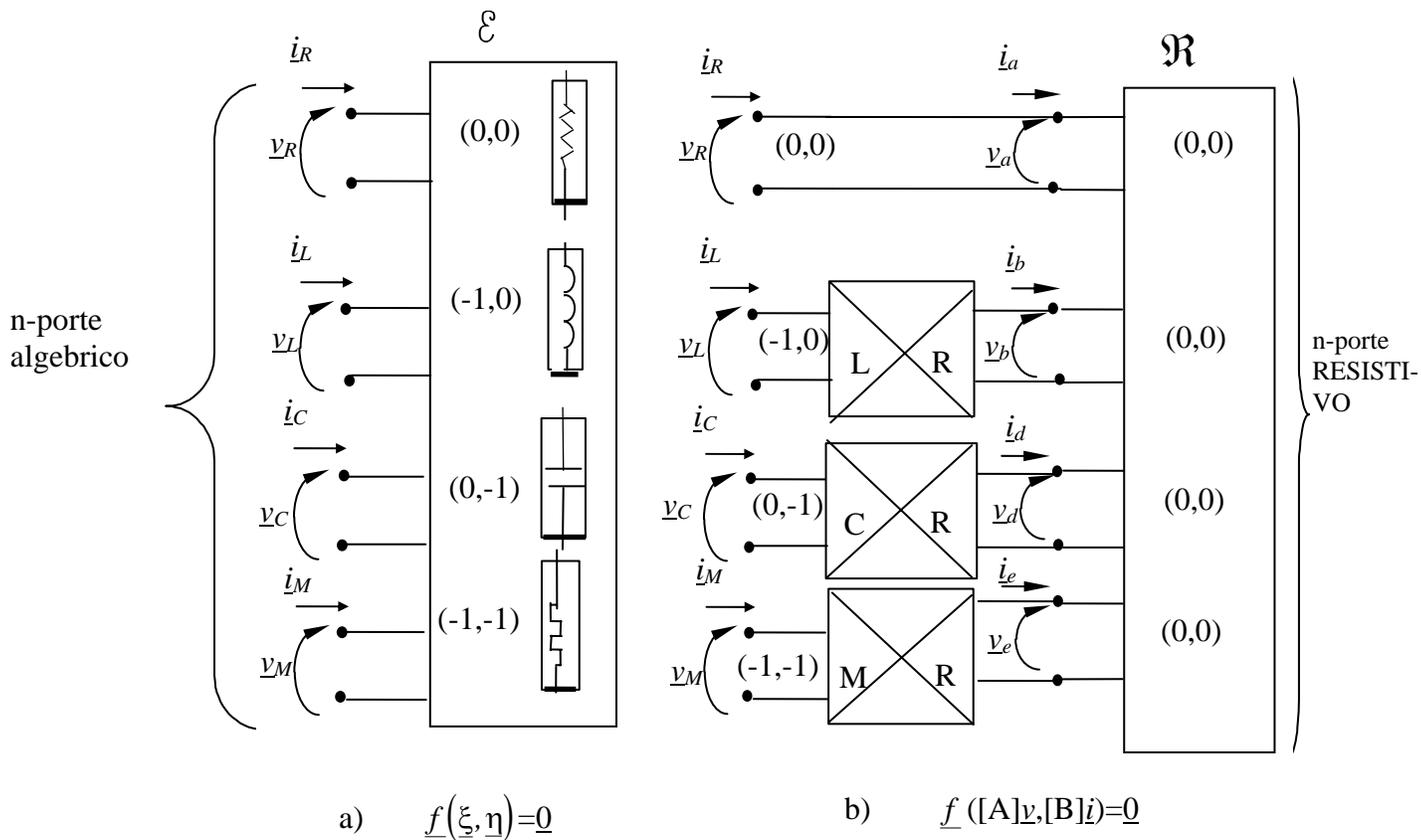
Verrà considerato solo il caso in cui α_j e β_j possono essere 0 o ± 1 . La prova per casi di ordine maggiore è simile e richiede mutatori di ordine maggiore.

Sia \mathcal{C} un n-porte algebrico descritto da una relazione costitutiva

$$f(\xi, \eta) = 0$$

supponendo che α_j e β_j possano assumere solo i valori 0 o ± 1 per semplicità, si ripartiscono le porte in 4 gruppi:

(0,0) , (-1,0) , (0,-1) , (-1,-1) come mostrato qui in figura (a)
 ↑ ↑ ↑ ↑
 resistore induttore condensatore memristore



La coppia (ξ_k, η_k) di una generica porta k fra le n può essere trasformata linearmente secondo il seguente criterio:

$$\begin{cases} \xi_k = A_k v_k \\ \eta_k = B_k i_k \end{cases}$$

A_k e B_k individuano la matrice di trasmissione di un mutatore di tipo 1 sulla porta k-esima

se la porta è (0,0) $\Rightarrow A_k=1; B_k=1$

se la porta è (-1,0) $\Rightarrow \begin{cases} \phi_k = A_k v_k \\ B_k = 1 \end{cases} \quad (\eta_k=i_k)$

eccetera

La figura (b) mostra il risultato. Le matrici [A] e [B] rappresentano, in forma compatta, le $\begin{cases} \xi_k = A_k v_k \\ \eta_k = B_k i_k \end{cases}$.

Le coppie di vettori (v_a, i_a) ; (v_b, i_b) ; (v_d, i_d) ; (v_e, i_e) indicano le variabili di ingresso al multiporta resistivo \mathfrak{R} , raggruppate in base alla categoria di mutatori di provenienza.

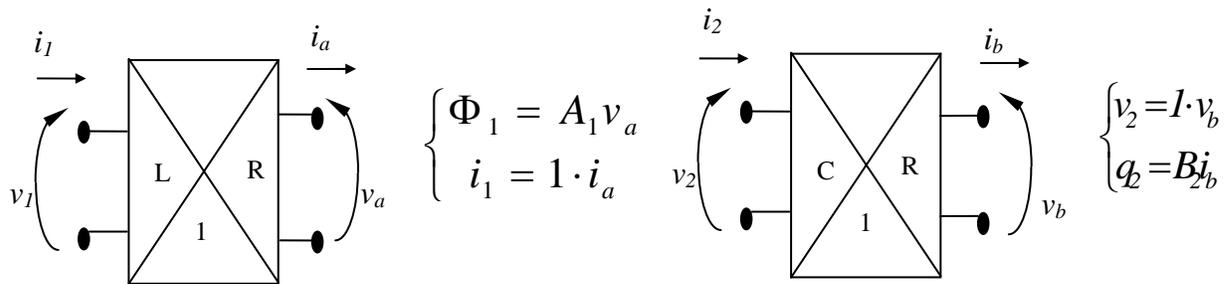
Il n-porte resistivo \mathfrak{R} sintetizza la relazione $f([A]v, [B]i) = 0$, nella quale [A] e [B] sono fissati dalla scelta dei mutatori.

Esempio:

Si vuole sintetizzare un 2-porte algebrico non-lineare descritto da

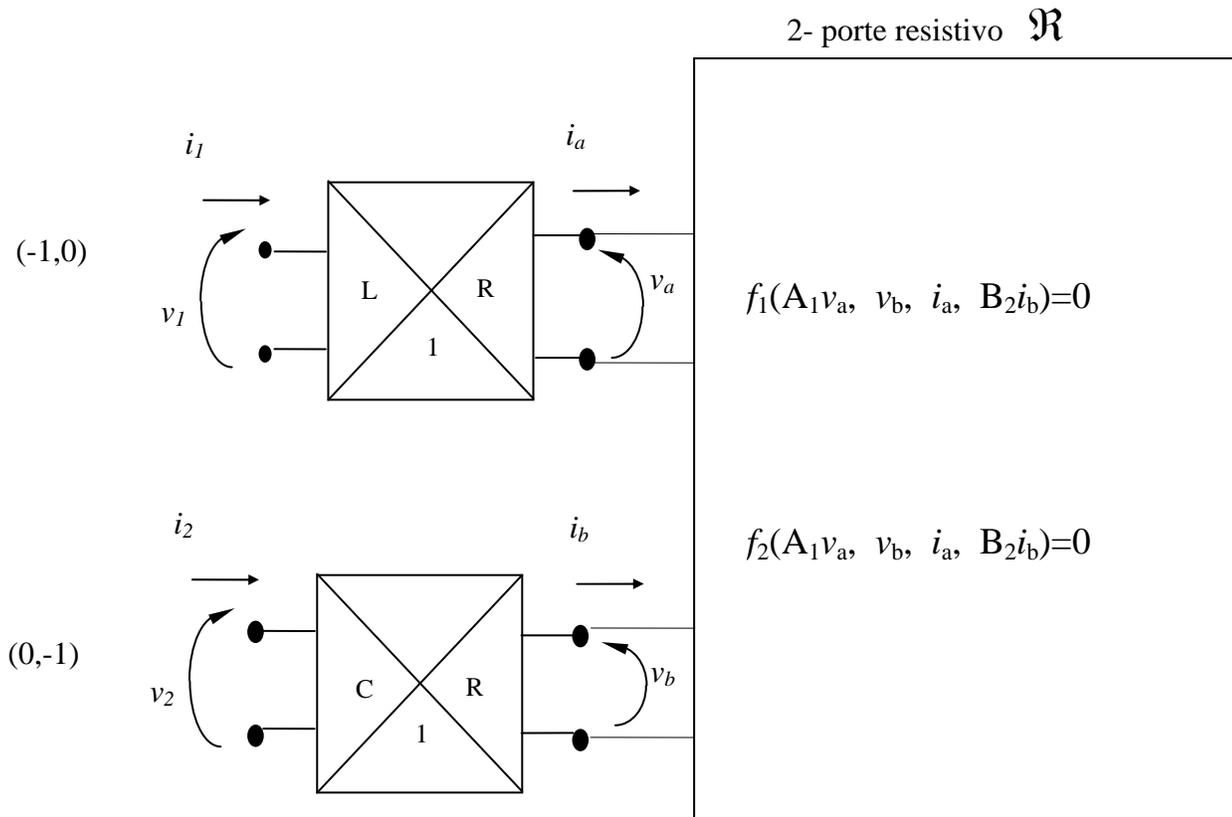
$$\begin{cases} f_1(\Phi_1, v_2, i_1, q_2) = 0 \\ f_2(\Phi_1, v_2, i_1, q_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{una porta con } \phi_1, i_1 \leftrightarrow (-1, 0) \Rightarrow \text{mutatore L-R} \\ \text{una porta con } v_2, q_2 \leftrightarrow (0, -1) \Rightarrow \text{mutatore C-R} \end{cases}$$

Si scelgono i seguenti mutatori



(Per evitare confusioni, le tensioni e correnti “di interfaccia” sono state indicate con pedici a e b invece che con il pedice k della porta)

Risultato:



Elementi dinamici

Ogni elemento concentrato non algebrico è dinamico . Perciò la classe degli elementi dinamici è molto più ampia di quella degli elementi algebrici.

Un elemento dinamico ad una porta ha una relazione costitutiva espressa da un numero M di equazioni della forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(v,i; v^{(1)}, \dots, v^{(\alpha)}; i^{(1)}, \dots, i^{(\beta)}; v^{(-1)}, \dots, v^{(-\gamma)}; i^{(-1)}, \dots, i^{(-\delta)}; x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_\ell^{(k_\ell)}, \dots, x_n^{(k_n)}; t)=0 \\ f_2(v,i; v^{(1)}, \dots, v^{(\alpha)}; i^{(1)}, \dots, i^{(\beta)}; v^{(-1)}, \dots, v^{(-\gamma)}; i^{(-1)}, \dots, i^{(-\delta)}; x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_\ell^{(k_\ell)}, \dots, x_n^{(k_n)}; t)=0 \\ \vdots \\ f_M(v,i; v^{(1)}, \dots, v^{(\alpha)}; i^{(1)}, \dots, i^{(\beta)}; v^{(-1)}, \dots, v^{(-\gamma)}; i^{(-1)}, \dots, i^{(-\delta)}; x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2)}, \dots, x_\ell^{(k_\ell)}, \dots, x_n^{(k_n)}; t)=0 \end{array} \right.$$

Variabili interne

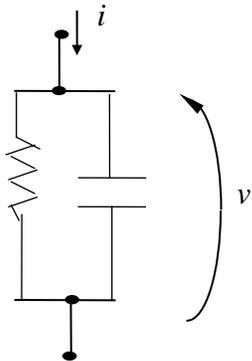
t non compare \Leftrightarrow il componente è tempo-invariante

$k_i \geq 0$ per $\ell \geq i$ (derivate o ordine 0)

$k_i < 0$ per $i > \ell$ (integrali)

$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

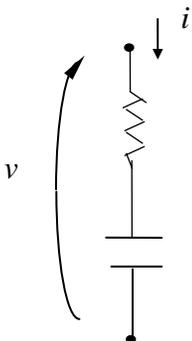
Ecco alcuni esempi, lineari e non lineari, già introdotti in precedenza



$$i - \frac{v}{R} - C \frac{dv}{dt} = 0$$



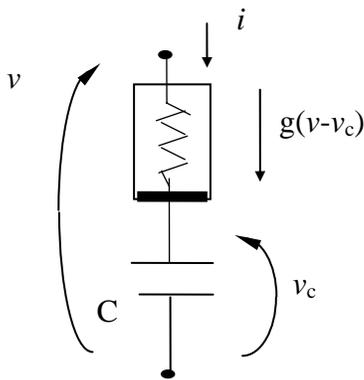
$$f(i, v, v^{(1)}) = 0$$



$$i + RC \frac{di}{dt} - C \frac{dv}{dt} = 0$$



$$f(i, i^{(1)}, v^{(1)}) = 0$$



$$\begin{cases} i - g(v - v_c) = 0 \\ i - C \frac{dv_c}{dt} = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} f_1(i, v, v_c) = 0 \\ f_2(i, v, v_c^{(1)}) = 0 \end{cases}$$

Infine: $v = w(i^{(1)})h(v)g(i - f(v^{(-1)})) \Rightarrow f(v, i, i^{(1)}, v^{(-1)}) = 0$ (modello di Chua per un induttore)

Funzioni scalari

Un elemento dinamico a n porte ha una relazione costitutiva analoga, salvo il fatto che le variabili descrittive v, i nelle f_j sono rimpiazzate da vettori.

I modelli circuitali più realistici per i dispositivi sono realizzati tramite collegamenti non compatibili fra elementi algebrici. Perciò tali modelli sono elementi dinamici.

La relazione costitutiva per un elemento dinamico può spesso essere riportata a una equazione (vettoriale) di stato e a una equazione (vettoriale) di uscita, come avviene usualmente nei sistemi dinamici:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{\eta}) \\ \underline{\xi} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{\eta}) \end{cases}$$

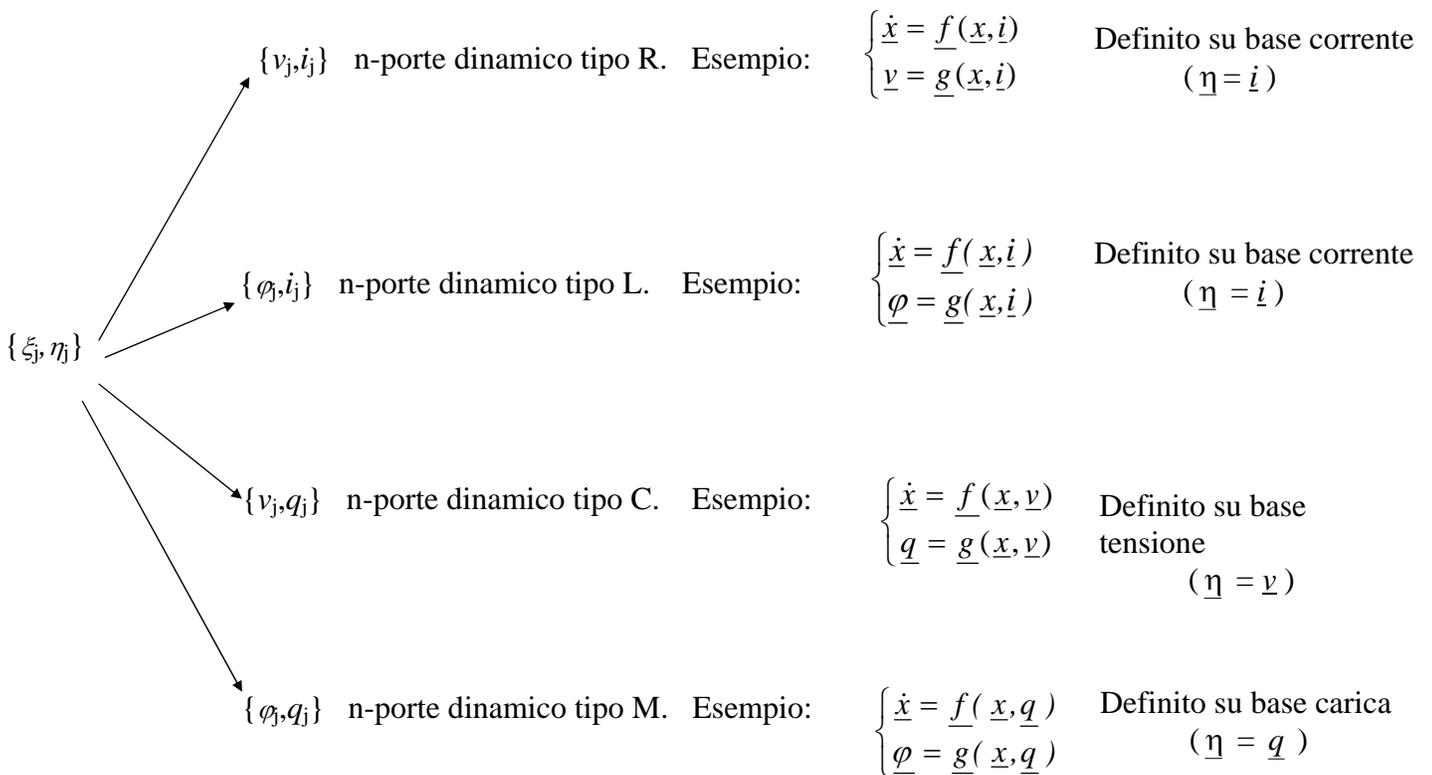
con: $\underline{x} \in \mathfrak{R}^m$ variabile di stato ; $\begin{cases} \underline{f}: \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^m \\ \underline{g}: \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^n \end{cases}$;

nei casi più semplici:

$$\{\xi_i, \eta_j\} \in \{\{v_j, i_j\}, \{\varphi_j, i_j\}, \{v_j, q_j\}, \{\varphi_j, q_j\}\}$$

E' importante rilevare che l'ordine di etichettatura delle variabili di porta con ξ_j e η_j può cambiare con la porta j considerata: ogni ξ_j può significare una $v_j^{(\alpha)}$ o una $i_j^{(\beta)}$ (dualmente per η_j). Se così non fosse (se, per esempio, ogni ξ_j fosse sempre associata alla prima variabile di porta) non sarebbe, in generale, possibile scrivere le equazioni nella forma
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{\eta}) \\ \underline{\xi} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{\eta}) \end{cases}$$
. Perciò il caso generale è quello di elementi dinamici misti e di ordine superiore.

Sono dunque casi molto particolari e importanti quelli di elementi a n -porte (oppure $n+1$ terminali) in cui l'associazione di ξ_j e η_j è dello stesso tipo $v_j^{(\alpha)}$, $i_j^{(\beta)}$ per ogni $j=1, \dots, n$. In particolare, se tale tipo è una fra le quattro coppie di variabili fondamentali, si può parlare di multiporte dinamici di tipo R,L,C,M. Essi sono analoghi ai multiporte algebrici fondamentali (individuati da $\underline{f}_R, \underline{f}_L, \underline{f}_C, \underline{f}_M$)



Queste 4 famiglie di n -porte dinamici sono distinte: in generale *non è possibile ricondurre l'equazione da una classe ad un'altra*.

Se, per esempio, si considera il tipo M e si deriva la $\underline{\varphi} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{q})$ rispetto al tempo (per tentare di ricondurla ad un tipo R) si ha:

$$(\dot{\phi} =) \underline{v} = \underline{g}_x(\underline{x}, \underline{q}) \cdot \dot{\underline{x}} + \underline{g}_q(\underline{x}, \underline{q}) \cdot \dot{\underline{q}} = \underline{g}_x(\underline{x}, \underline{q}) \cdot \underline{f}(\underline{x}, \underline{q}) + \underline{g}_q(\underline{x}, \underline{q}) \cdot \underline{i} = \underline{h}(\underline{x}, \underline{q}, \underline{i})$$

\uparrow
 $\underline{f}(\underline{x}, \underline{q})$

\uparrow
 \underline{i}

\downarrow

Non riconducibile alla
 $\underline{v} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{i})$ del tipo R,
almeno in generale.

TEOREMA III (realizzabilità di n-porte dinamici tipo R,L,C,M)

Ogni n-porte dinamico tipo R,L,C,M può essere realizzato impiegando soltanto :

- { Mutatori
- { Condensatori (o induttori) lineari a 2 terminali
- { Un n+m porte resistivo (in generale non lineare)

Dimostrazione:

si dà una dimostrazione costruttiva per il caso di un n-porte dinamico di tipo R definito su base tensione

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{v}) \\ \underline{i} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{v}) \end{cases}$$

le componenti del vettore di stato \underline{x} possono essere tensione o correnti. Definiamo allora, per ogni componente, una trasformazione lineare

$$x_k = A_k v_{c_k} \rightarrow \underline{x} = [A] \underline{v}_c \quad \text{con} \quad \underline{x}, \underline{v}_c \in \mathfrak{R}^m$$

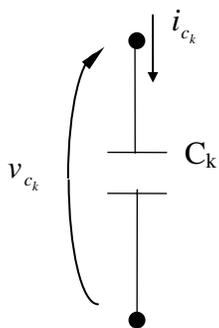
questa trasformazione è riassunta dalla matrice diagonale $[A]$, e manda \underline{x} in un vettore di tensioni \underline{v}_c che verrà interpretato come un vettore di tensioni di condensatore. I termini A_k sono, di volta in volta, adimensionali oppure conduttanze.

Si ha allora

$$\begin{cases} [A] \underline{v}_c = \underline{f}([A] \underline{v}_c, \underline{v}) \\ \underline{i} = \underline{g}([A] \underline{v}_c, \underline{v}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{v}_c = [A]^{-1} \underline{f}([A] \underline{v}_c, \underline{v}) \\ \underline{i} = \underline{g}([A] \underline{v}_c, \underline{v}) \end{cases}$$

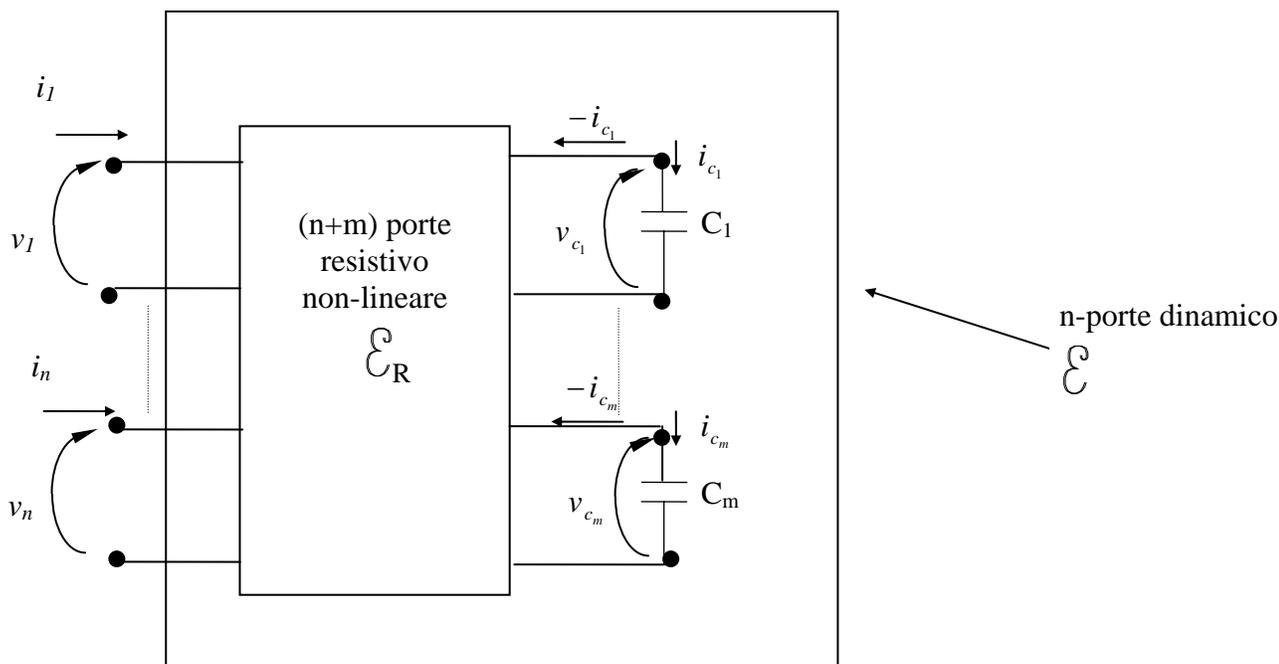
$[A]^{-1}$ esiste sempre perché $[A]$ è diagonale e $A_k \neq 0 \quad k = 1, \dots, m$. Definiamo ora:

$$i_{c_k} = C_k v_{c_k} \Rightarrow \underline{i}_c = [C] \underline{v}_c \quad \underline{i}_c \in \mathfrak{R}^m \text{ (come } \underline{x}, \underline{v}_c); [C] \text{ diagonale}$$



e definiamo, infine, il (n+m) porte resistivo:
$$\begin{cases} -i_c = -[C][A]^{-1} f([A] \underline{v}_c, \underline{v}) \\ i = g([A] \underline{v}_c, \underline{v}) \end{cases}$$

che individua la sintesi circuitale riportata qui a fianco:

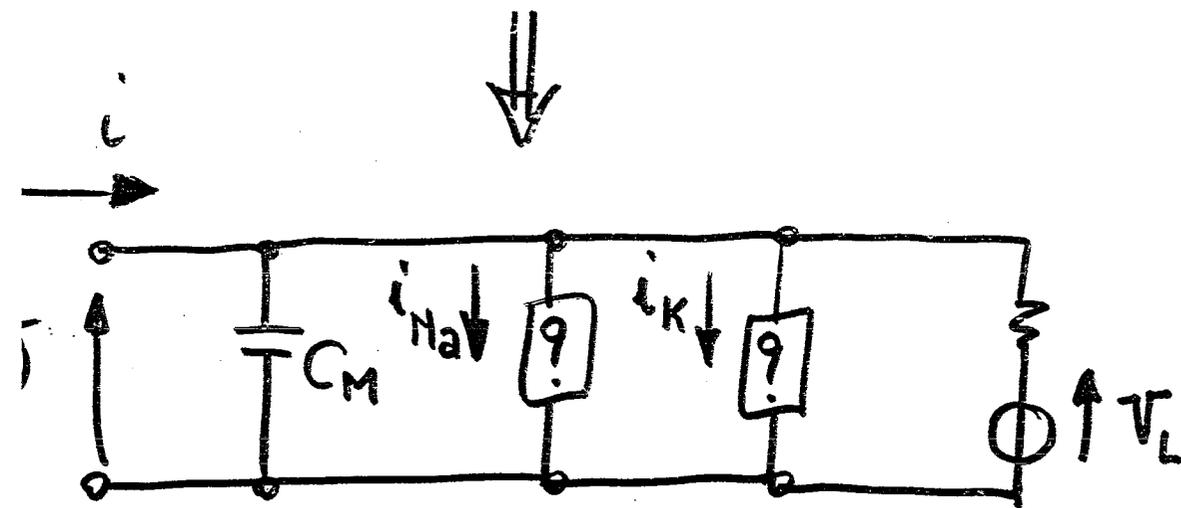
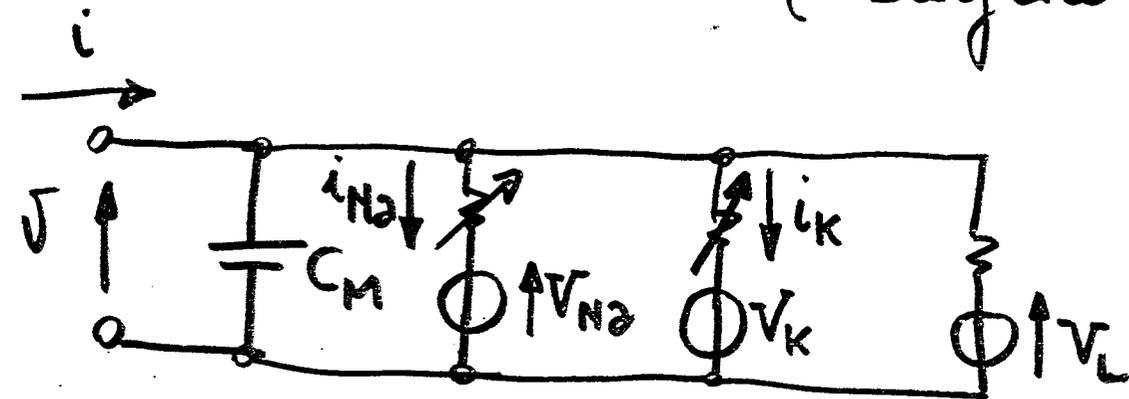


Se, invece di un tipo R, si considerasse un tipo L,C,M, il procedimento sarebbe simile, con l'aggiunta di mutatori ove necessario.

Esempio sul teorema III

Modello di HH per la membrana dell'arone

Modello classico (sbogliato):



le equazioni descrittive di questi due blocchi sono quelle di altrettanti una-porte dinamici "tipo R".

Infatti

$$\left. \begin{aligned} i_k &= (\bar{v} - V_k) \bar{q}_k \cdot n^4 \\ \frac{dn}{dt} &= f_n(n, \bar{v}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} i &= g(x, \bar{v}) \\ \dot{x} &= f(x, \bar{v}) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} i_{Na} &= (\bar{v} - V_{Na}) \bar{q}_{Na} \cdot m^3 \cdot h \\ \frac{dm}{dt} &= f_m(m, \bar{v}) \\ \frac{dh}{dt} &= f_h(h, \bar{v}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} i &= g(\underline{x}, \bar{v}) \\ \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \bar{v}) \end{aligned}$$

entrambi una-forta dinamica, tipo R,
definiti su BASE TENSIONE (\bar{v}).

Siuteri

1° passo: n, m, h sono variabili
adimensionali di origine
non elettrica. Si pone
allora

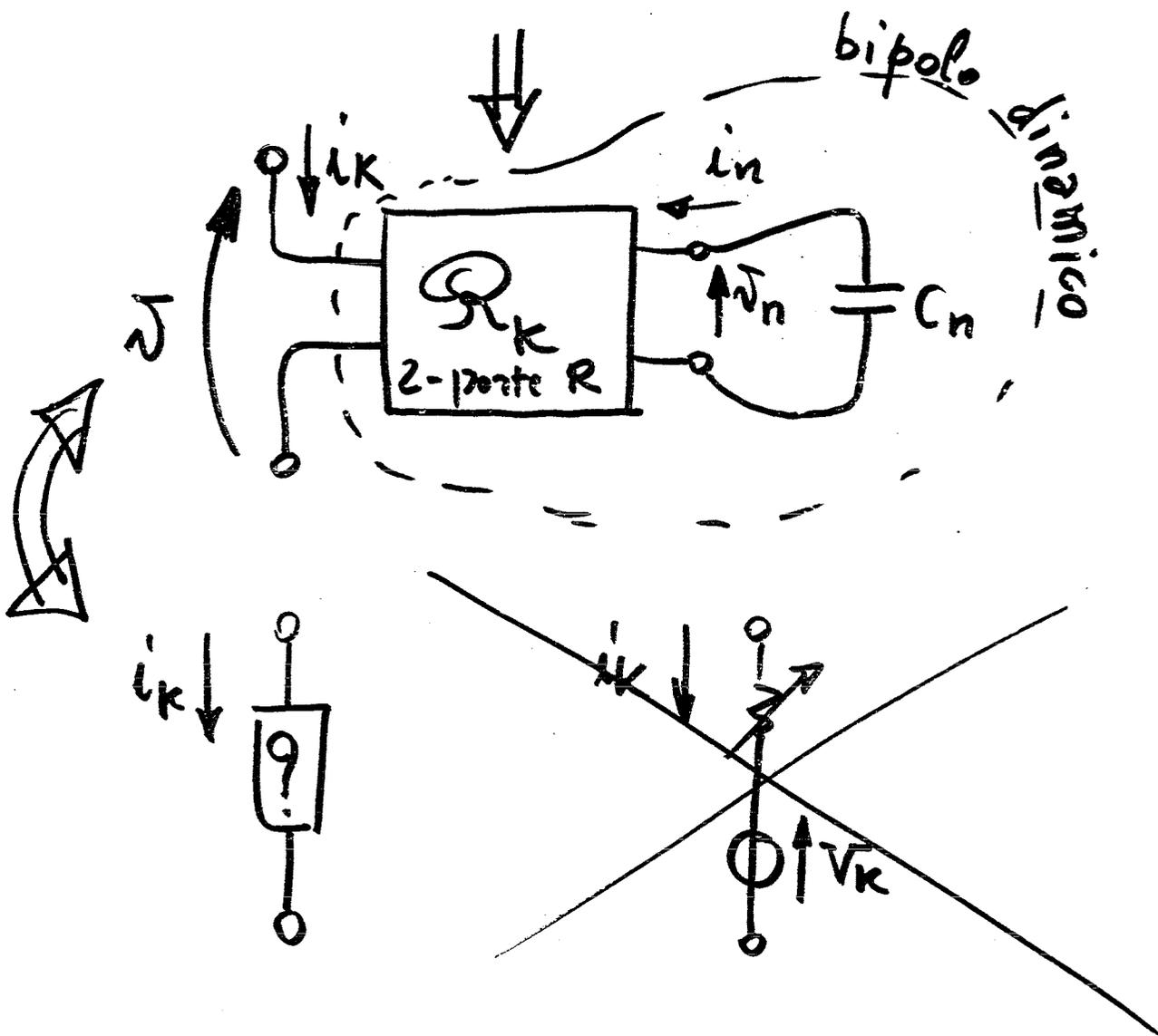
$$n = \alpha \bar{v}_n; \quad m = \alpha \bar{v}_m; \quad h = \alpha \bar{v}_h$$

con: $\bar{v}_n, \bar{v}_m, \bar{v}_h$ tensioni; $\alpha = \text{Volt}^{-1}$

2° passo : blocco K . Posto $i_n = -C_n \frac{d\bar{v}_n}{dt}$

le equazioni diventano

$$\begin{cases} i_n = -C_n \frac{d\bar{v}_n}{dt} = -\frac{C_n}{\alpha} f_n(\alpha \bar{v}_n, \bar{v}) \\ i_k = (\bar{v} - V_k) \bar{g}_k \alpha^4 \bar{v}_n^4 \end{cases}$$



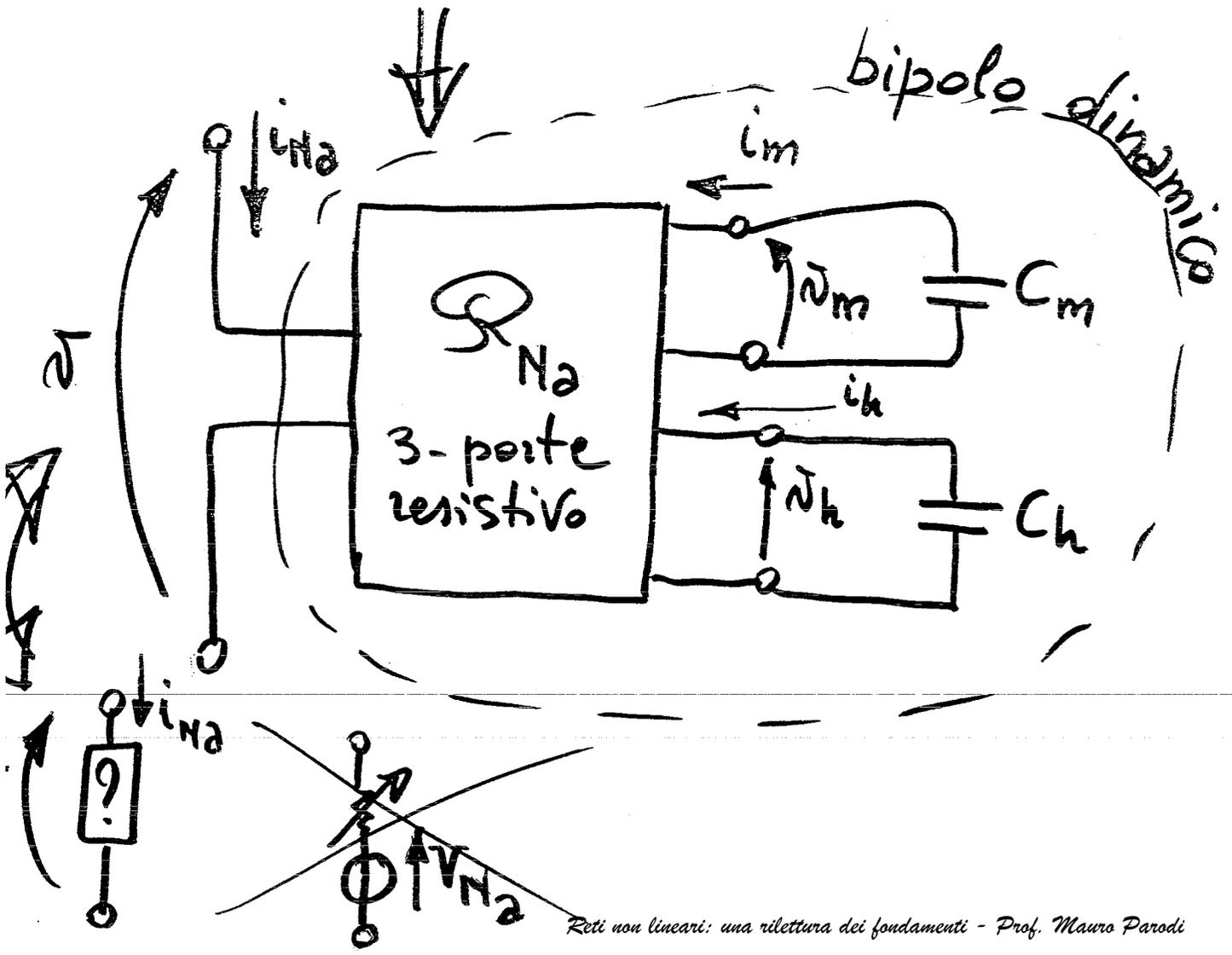
3° passo: blocco Na

Posto

$$\begin{cases} i_m = -C_m \frac{d\bar{v}_m}{dt} \\ i_h = -C_h \frac{d\bar{v}_h}{dt} \end{cases}$$

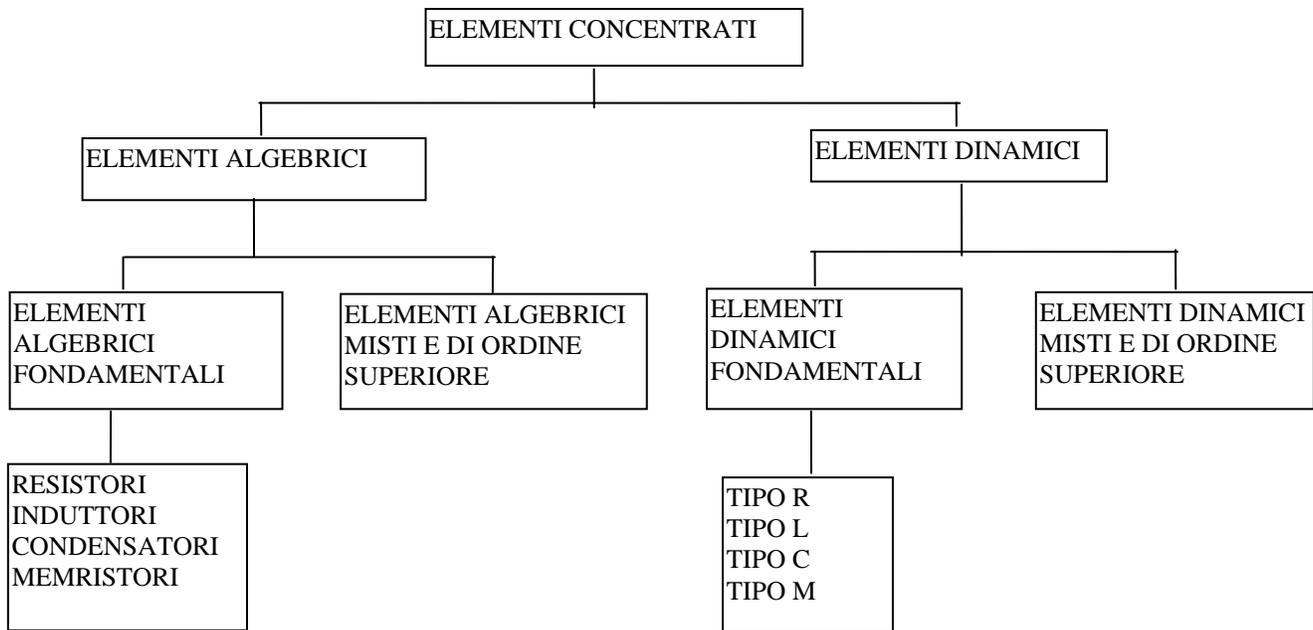
le equazioni diventano

$$\begin{cases} i_{Na} = (\bar{v} - \bar{v}_{Na}) \bar{g}_{Na} \propto \alpha^4 \bar{v}_m^3 \bar{v}_h \\ i_m = -C_m \frac{d\bar{v}_m}{dt} = -\frac{C_m}{\alpha} f_m(\alpha \bar{v}_m, \bar{v}) \\ i_h = -C_h \frac{d\bar{v}_h}{dt} = -\frac{C_h}{\alpha} f_h(\alpha \bar{v}_h, \bar{v}) \end{cases}$$



Risultati generali per elementi multi-terminale e multi-porta (concentrati)

La classificazione sviluppata sin qui è riassunta nel diagramma seguente:

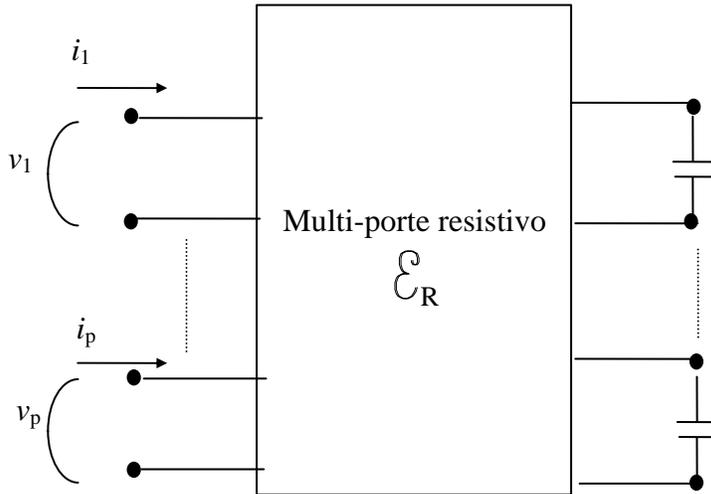


Sia nel caso algebrico che in quello dinamico, gli elementi misti e quelli di ordine superiore (ossia tutto ciò che non è “fondamentale”) sono quelli per i quali si conoscono meno risultati nella teoria dei circuiti. Per questo motivo una classificazione più raffinata non è ancora possibile.

La classe degli elementi dinamici è più ampia di quella degli elementi algebrici. Nonostante questo, *i resistori multi-porta giocano un ruolo di importanza unica per entrambe le classi.* Ciò è evidenziato dal teorema IV, enunciato qui di seguito.

TEOREMA IV (decomposizione di un elemento concentrato)

Ogni elemento concentrato a (p+1) terminali o a p porte si può sintetizzare usando solo un numero FINITO di condensatori LINEARI a due terminali (o induttori) e un multiporte resistivo (in generale non-lineare) nella configurazione seguente

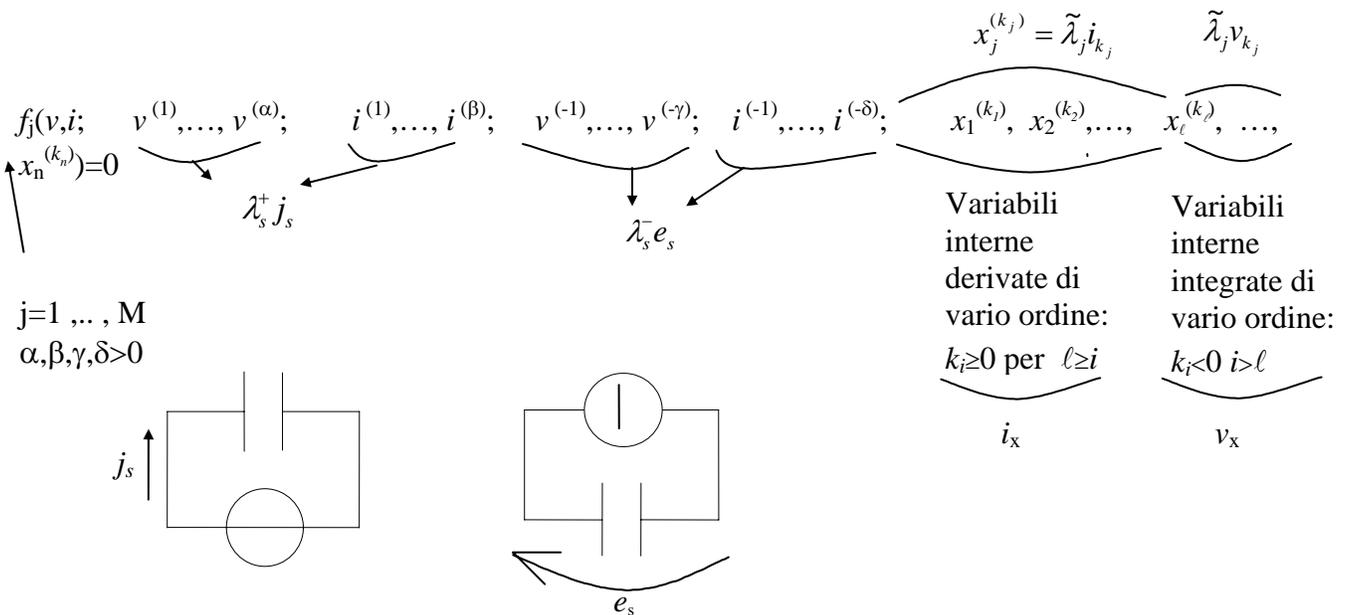


Dimostrazione:

per semplicità si fa riferimento al caso p=1(bipolo) tempo invariante.

L'estensione al caso generale è abbastanza diretta.

Il punto di partenza è dato dalle M equazioni della relazione costitutiva nel caso tempo-invariante (fra gli argomenti delle f_j non compare t):



Passo 1: dalle M funzioni f_j si passa alla sola funzione scalare f così definita:

$$f(.) = f_1^2(.) + f_2^2(.) + \dots + f_M^2(.)$$

mediante la quale il problema di sintesi è riferito alla sola equazione scalare

$$f(.) = 0$$

(le variabili $(.)$ sono le stesse di tutte le f_j e non si riscrivono per brevità)

Passo 2: si definiscono ora le seguenti trasformazioni lineari sulle variabili argomento di f :

$$\text{trasformazioni } (j) \quad \begin{cases} v^{(k)} = \lambda_k^+ j_k & k = 1, \dots, \alpha \\ i^{(q)} = \lambda_{\alpha+q}^+ j_{\alpha+q} & q = 1, \dots, \beta \end{cases}$$

ove le j_s ($s=k$ oppure $s=\alpha+q$) sono correnti e le rispettive λ_s^+ sono coefficienti con le dimensioni fisiche opportune al variare di k (o di q)

$$\text{trasformazioni } (e) \quad \begin{cases} v^{(-k)} = \lambda_k^- e_k & k = 1, \dots, \gamma \\ i^{(-q)} = \lambda_{\gamma+q}^- e_{\gamma+q} & q = 1, \dots, \delta \end{cases}$$

ove le e_s ($s=k$ oppure $s=\gamma+q$) sono tensioni e le rispettive λ_s^- sono coefficienti con le dimensioni fisiche opportune al variare di k (o di q)

$$\text{trasformazioni } (i_x) \quad \left\{ x_j^{(k_j)} = \tilde{\lambda}_j i_{k_j} \quad j=1, \dots, \ell (\Rightarrow k_j \geq 0) \right.$$

ove le i_{k_j} sono correnti e le $\tilde{\lambda}_j$ sono coefficienti con opportune dimensioni fisiche per ogni $x_j^{(k_j)}$

$$\text{trasformazioni } (v_x) \quad \left\{ x_j^{(k_j)} = \tilde{\lambda}_j v_{k_j} \quad j=\ell+1, \dots, n (\Rightarrow k_j < 0) \right.$$

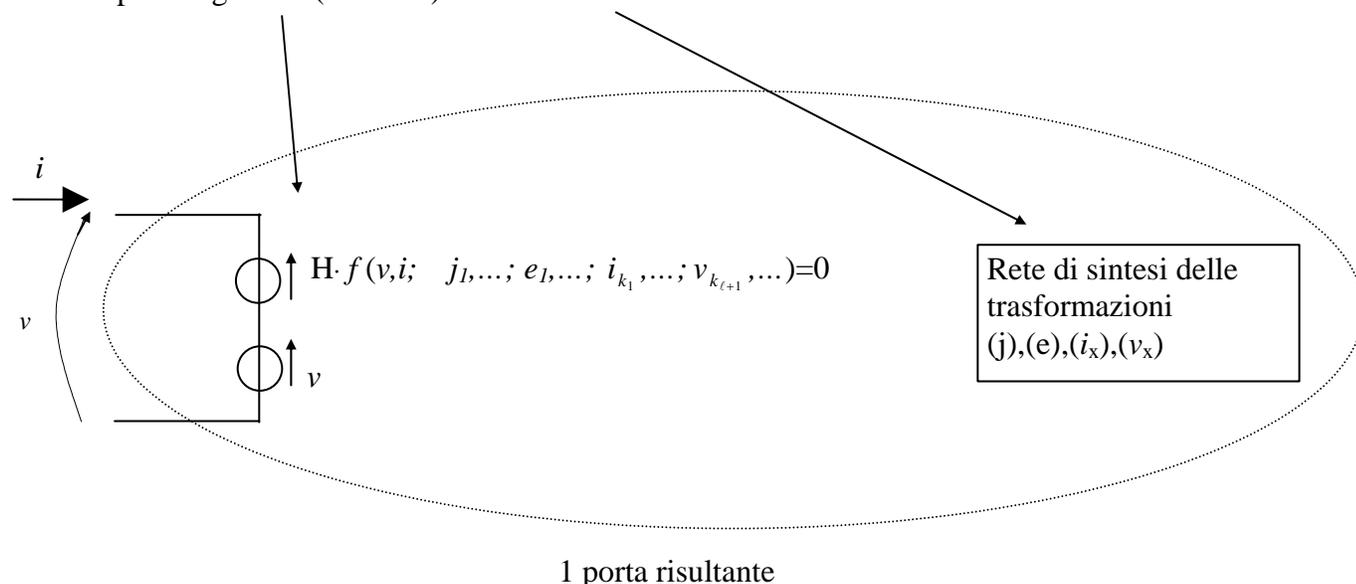
ove le v_{k_j} sono tensioni e le $\tilde{\lambda}_j$ sono coefficienti con opportune dimensioni fisiche per ogni $x_j^{(k_j)}$

Passo 3: le variabili a secondo membro nelle (j),(e),(i_x),(v_x) sono variabili ausiliarie che associano alla f(.)=0 la equazione ALGEBRICA:

$$f(v,i; \underbrace{j_1, \dots, j_\alpha; j_{\alpha+1}, \dots, j_{\alpha+\beta}}_{(j)}; \underbrace{e_1, \dots, e_\gamma; e_{\gamma+1}, \dots, e_{\gamma+\delta}}_{(e)}; \underbrace{i_{k_1}, \dots, i_{k_\ell}}_{(i_x)}; \underbrace{v_{k_{\ell+1}}, \dots, v_{k_n}}_{(v_x)})=0$$

NOTA: per l'esattezza, la funzione può mantenere il nome *f* solo scrivendo gli argomenti come $\lambda_k^+ j_1, \dots; \lambda_k^- e_1, \dots$ etc. Non è stato fatto per concisione di scrittura degli argomenti.

In questo modo il procedimento di sintesi del bipolo si scinde in una parte algebrica (resistiva) e in una dinamica:



Il coefficiente H del generatore pilotato è messo per le consuete ragioni dimensionali. L'equazione di maglia alla porta è

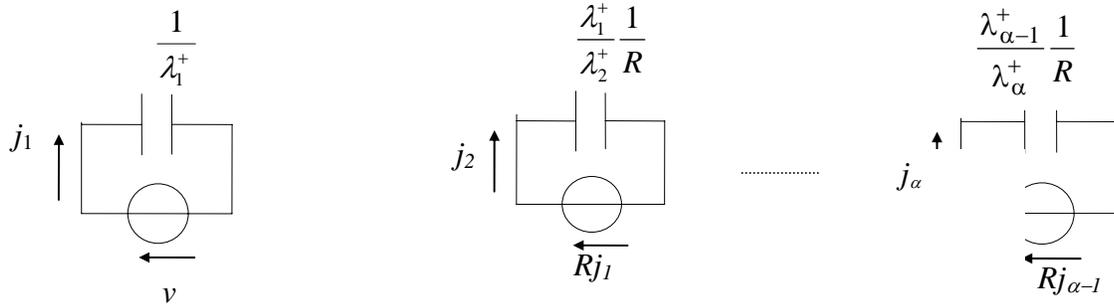
$$v = H \cdot f(\dots) + v \Rightarrow H \cdot f(\dots) = 0 \Rightarrow f(\dots) = 0$$

Ragion per cui, resta da sintetizzare la parte dinamica espressa dalle trasformazioni (j),(e),(i_x),(v_x).

Passo 4: sintesi circuitale delle (j)

Le (j) coinvolgono derivate successive della v e della i di porta rispettivamente.

Le α trasformazioni $v^{(k)} = \lambda^+_{kj} j_k$ si ottengono tramite la sequenza di α circuiti dinamici:



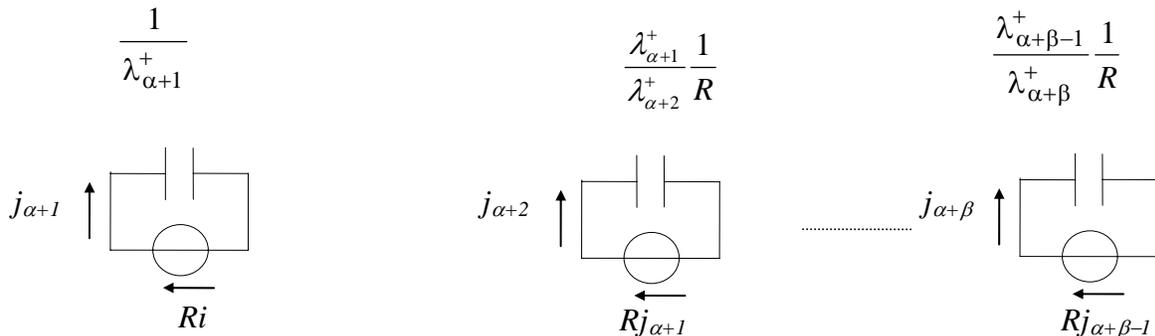
$$j_1 = \frac{1}{\lambda_1^+} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\lambda_1^+} v^{(1)}$$

$$j_2 = \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} \frac{1}{R} \frac{d(Rj_1)}{dt}$$

$$= \frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} \frac{1}{\lambda_1^+} \frac{d(v^{(1)})}{dt} = \frac{1}{\lambda_2^+} v^{(2)}$$

R ha le dimensioni fisiche di una resistenza: si può pensare che fissi il “fattore di scala” della capacità e dei generatori pilotati (tranne il primo).

Le β trasformazioni $i^{(q)} = \lambda^+_{kj} j_k$ si ottengono dalla sequenza di β circuiti dinamici:



$$j_{\alpha+1} = \frac{1}{\lambda_{\alpha+1}^+} \frac{1}{R} \frac{d(Ri)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{\alpha+1}^+} i^{(1)}$$

$$j_{\alpha+2} = \frac{\lambda_{\alpha+1}^+}{\lambda_{\alpha+2}^+} \frac{1}{R} \frac{d(Rj_{\alpha+1})}{dt} =$$

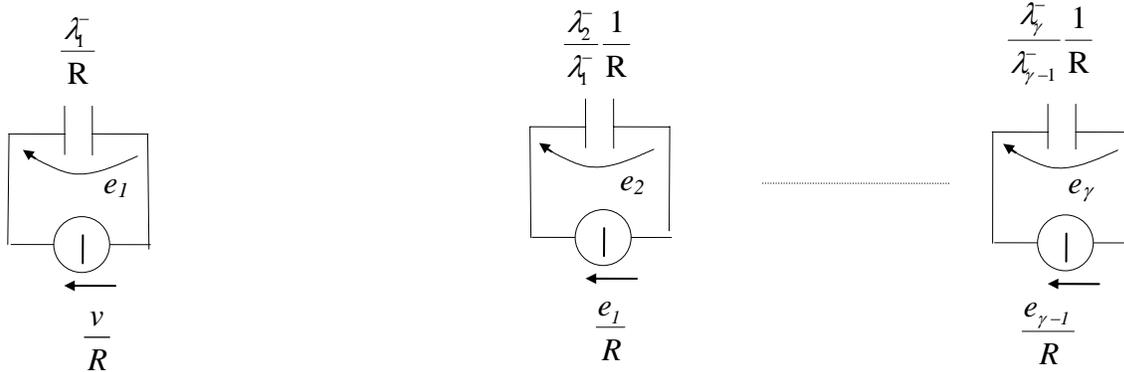
$$= \frac{\lambda_{\alpha+1}^+}{\lambda_{\alpha+2}^+} \frac{1}{\lambda_1^+ \dots \lambda_{\alpha+1}^+} \left(i^{(1)} \right) = \frac{1}{\lambda_{\alpha+2}^+} i^{(2)}$$

Per R valgono le stesse considerazioni del caso precedente

Passo 5: sintesi circuitale delle (e)

Le (e) coinvolgono integrali successivi della v e della i di porta rispettivamente. Sono pertanto duali delle (j).

Le γ trasformazioni $v^{(-k)} = \lambda_k^- e_k$ si ottengono tramite la sequenza di γ circuiti dinamici:



$$\frac{v}{R} = \frac{\lambda_1^-}{R} \frac{d}{dt}(e_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \lambda_1^- e_1^{(1)} \Rightarrow$$

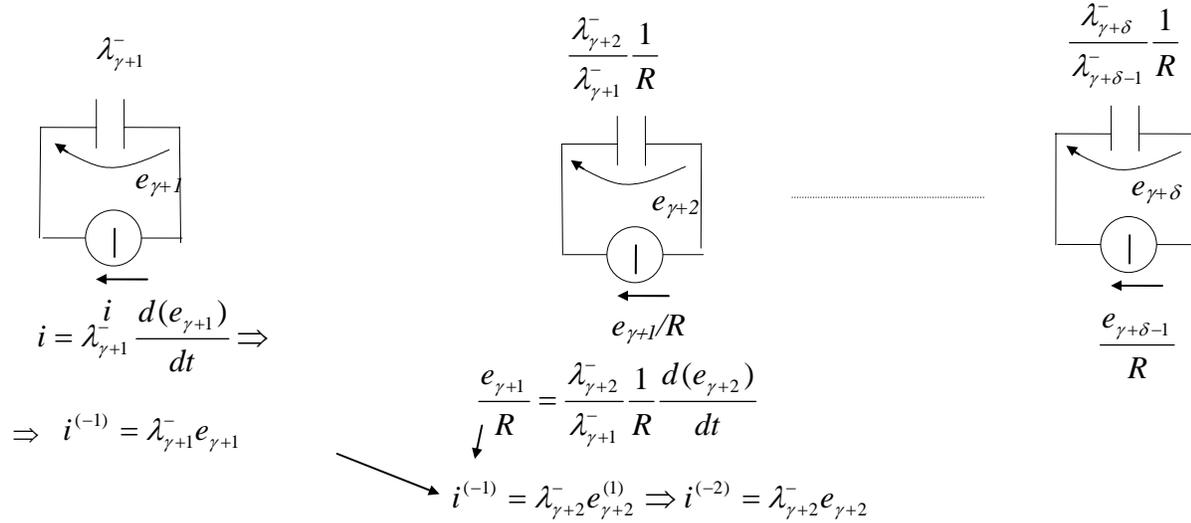
$$\Rightarrow v^{(-1)} = \lambda_1^- e_1$$

$$\frac{e_1}{R} = \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^-} \frac{1}{R} \frac{d}{dt}(e_2) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ (e_1 =) \frac{v^{(-1)}}{\lambda_1^-} &= \frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^-} e_2^{(1)} \\ \Rightarrow v^{(-2)} &= \lambda_2^- e_2 \end{aligned}$$

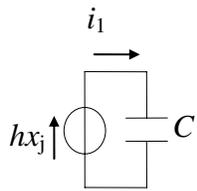
$$v^{(-\gamma)} = \lambda_\gamma^- e_\gamma$$

Le δ trasformazioni $i^{(-q)} = \lambda_{\gamma+q}^- e_{\gamma+q}$ si ottengono tramite la sequenza di δ circuiti dinamici:



Passo 6: sintesi circuitale delle (i_x)

Ognuna delle ℓ trasformazioni $x_j^{(k_j)} = \tilde{\lambda}_j i_{k_j}$ ($k_j \geq 0$) richiede l'impiego di un numero di circuiti elementari che cresce con k_j . Va rilevato esplicitamente che, se la trasformazione ha $k_j=0$, si ha $x_j = \tilde{\lambda}_j i_{k_j}$ che è algebrica sia per x_j corrente che per x_j tensione \Rightarrow si sintetizza con un generatore pilotato e senza condensatori. Per k_j non nullo occorre una catena di k_j circuiti contenenti un generatore pilotato e un condensatore. I parametri della catena sono h , R , C . Il loro significato appare dallo sviluppo qui riportato.

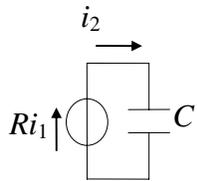


$$i_1 = C \frac{d}{dt}(hx_j) = hCx_j^{(1)}$$

h è :

#numero puro se x_j è una tensione,

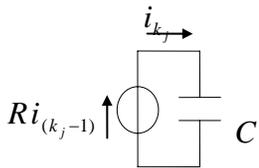
resistenza se x_j è una corrente



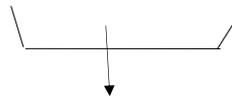
$$i_2 = C \frac{d}{dt}(Ri_1) = RC \frac{d}{dt}(i_1) = RC \cdot hCx_j^{(2)}$$

R : resistenza

⋮



$$i_{k_j} = C \frac{d}{dt}(Ri_{(k_j-1)}) = RC \frac{d}{dt}(i_{(k_j-1)}) = (RC)^{k_j-1} \cdot hC \cdot x^{(k_j)}$$



$$\frac{I}{\tilde{\lambda}_j} \Rightarrow R^{k_j-1} hC^{k_j} = \frac{I}{\tilde{\lambda}_j}$$

questa relazione, fissati ad esempio

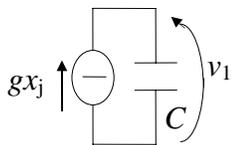
R, h e $\tilde{\lambda}_j$, dà la capacità C

Per ognuna delle ℓ trasformazioni occorre una catena di circuiti come quella sopra rappresentata. Le variabili $i_1, i_2, \dots, i_{(k_j-1)}$ sono variabili “di servizio” che naturalmente dovrebbero prendere un nome diverso per ognuna delle catene k_j . La capacità C e la resistenza R nei vari elementi della singola catena si potrebbero rendere diverse, ma non ci sono ragioni per farlo. In sottordine si potrebbero scegliere C_j, R_j specifiche per ciascuna catena k_j (ed anche h potrebbe diventare una h_j) ma anche questo non è necessario. Si noti la peculiarità della catena di circuiti elementari rispetto alle catene definite per le trasformazioni (j) e (e): in queste, ciascun circuito della catena ha una variabile “di uscita” che è argomento della $f(.)$ da sintetizzare; in quella, soltanto la variabile i_{k_j} dell’ultimo circuito della catena è

argomento della $f(\cdot)$, mentre le $i_1, i_2, \dots, i_{(k_j-1)}$ che la precedono nella catena segnano solo passi obbligati per ottenere i_{k_j} . La quantità totale di condensatori necessaria per la sintesi (i_x) è $\sum_{j=1}^{\ell} k_j$.

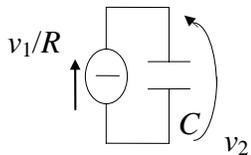
Passo 7: sintesi circuitale delle (v_x)

Ognuna delle $(n-\ell)$ trasformazioni $x_j^{(k_j)} = \tilde{\lambda}_j v_{k_j}$ ($k_j < 0 \ j = \ell+1, \dots, n$) richiede, similmente al caso (i_x), l'impiego di una catena di $|k_j|$ circuiti contenenti un generatore pilotato (questa volta in corrente) e un condensatore. I parametri della catena sono g, R, C . Il loro significato è evidenziato nello sviluppo seguente :



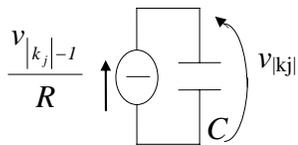
$$gx_j = C \frac{dv_1}{dt} \Rightarrow v_1 = \frac{g}{C} x_j^{(-1)}$$

g è :
 # conduttanza se x_j è una tensione,
 # numero puro se x_j è una corrente



$$\frac{v_1}{R} = C \frac{d}{dt}(v_2) \Rightarrow v_2 = \frac{1}{RC} v_1^{(-1)} = \frac{1}{RC} \frac{g}{C} x_j^{(-2)}$$

R : resistenza



$$\frac{v_{|k_j|-1}}{R} = C \frac{d}{dt}(v_{|k_j|}) \Rightarrow v_{|k_j|} = \frac{1}{RC} v_{|k_j|-1}^{(-1)} = \left(\frac{1}{RC}\right)^{|k_j|-1} \cdot \frac{g}{C} \cdot x_j^{(-|k_j|)}$$

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \Rightarrow R^{|k_j|-1} C^{|k_j|} \cdot \frac{1}{g} = \frac{1}{\tilde{\lambda}_j}$$

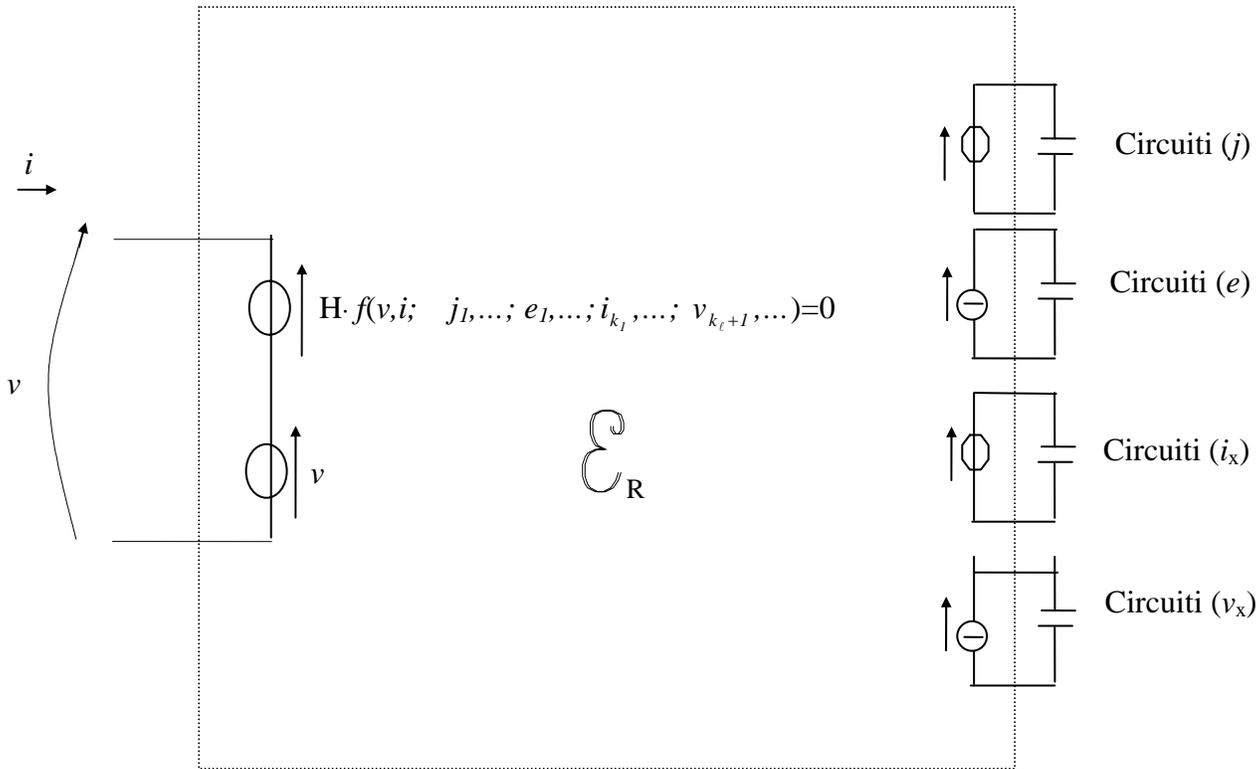
Le riflessioni su questa sintesi sono analoghe a quelle formulate le variabili $v_1, \dots, v_{|k_j|-1}$ sono "di servizio" e specifiche per la cat questa relazione, fissati ad esempio R, g e $\tilde{\lambda}_j$, dà la capacità C

come argomento nella $f(\cdot)$. I parametri C, R, g ammetterebbe: enunciate, nella sintesi delle (i_x), per C, R, h . Il numero di conde

catene $|k_j|$ è $\sum_{j=\ell+1}^n |k_j|$.

Passo 8: Il teorema IV è così provato per elementi con $p=1$ (bipoli). In luogo dei condensatori sarebbe stato possibile impiegare, *mutatis mutandis*, induttori. Per $p>1$ la dimostrazione si può generalizzare tenendo conto che le variabili di porta diventano vettori $\underline{v}, \underline{i}$.

La struttura del circuito è riassunta simbolicamente qui di seguito, sempre per $p=1$. La cornice tratteggiata delimita il multiporte resistivo (in generale non lineare) \mathcal{C}_R .



Commenti.

Il teorema IV mostra che ogni p -porte fatto di elementi concentrati multi-terminale o multiporta equivale ad una rete multi-terminale nella quale tutti gli elementi non lineari sono senza memoria. Il teorema si può interpretare come la versione circuitale di un risultato generale della teoria dei sistemi, dovuto a Wiener (*Cybernetics*, New York:Wiley 1961).

La prova del teorema evidenzia che :

un insieme minimo di elementi circuitali dai quali tutti gli elementi concentrati possono essere sintetizzati consta di condensatori lineari a 2 terminali (oppure induttori) e generatori pilotati non lineari resistivi”.

≡ Esempio di applicazione del teorema IV

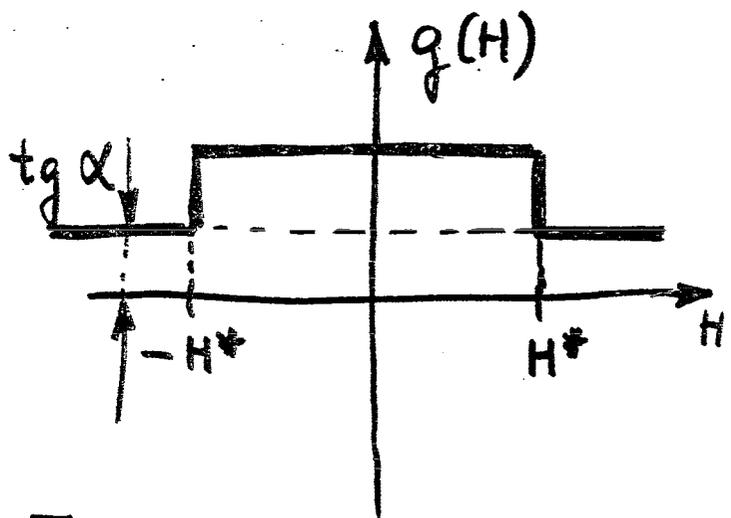
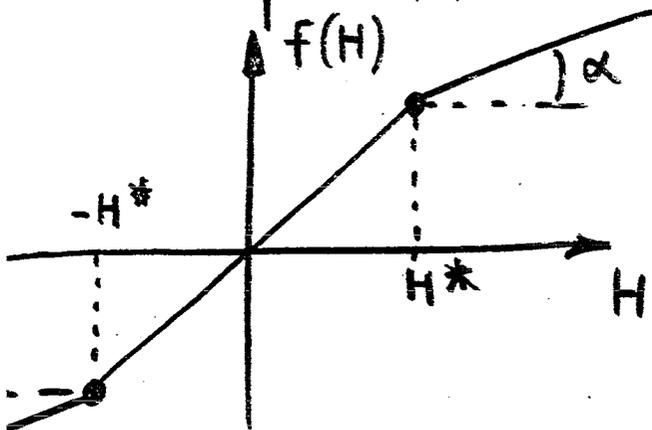
Isteresi: modello di Coleman-Hodgdon

$$\frac{dB}{dt} = \alpha \left| \frac{dH}{dt} \right| [f(H) - B] + \frac{dH}{dt} g(H)$$

f : disperi, monotona crescente
con $f'(\infty)$ finita

g : pari, continua a tratti,
con $g(\infty) = f'(\infty)$

Esempio



Posto :
$$\begin{cases} B = K_B \cdot v \\ H = K_H \cdot i \end{cases}$$

le relazione
costitutive
diventa :

$$\frac{dv}{dt} - \hat{\alpha} \left| \frac{di}{dt} \right| [\hat{f}(i) - v] - \frac{di}{dt} \cdot \hat{g}(i) = 0 \quad (\Omega)$$

$$\hat{\alpha} = \alpha K_H \quad (A^{-1}); \quad \hat{f}(i) = \frac{1}{K_B} f(K_H \cdot i) \quad (V); \quad \hat{g}(i) = \frac{K_H}{K_B} g(K_H i)$$

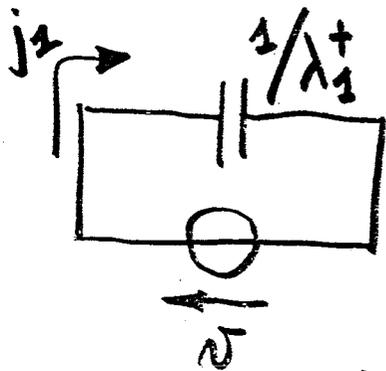
ovvero

$$\gamma(v, i, v^{(1)}, i^{(1)}) = 0$$

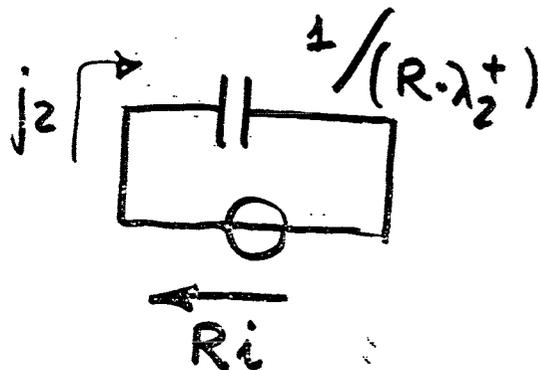
$$[\gamma] = s^{-1} \cdot v$$

che individua un bipolo dinamico con una sola equazione costitutiva ($M=1$) e privo di variabili interne $x_j(k_j)$.

Definiamo le trasformazioni lineari, tutte del tipo (j) purché non compaiano in γ né integrali di v , i né var. interne



$$j_1 = \frac{1}{\lambda_1^+} v^{(1)}$$

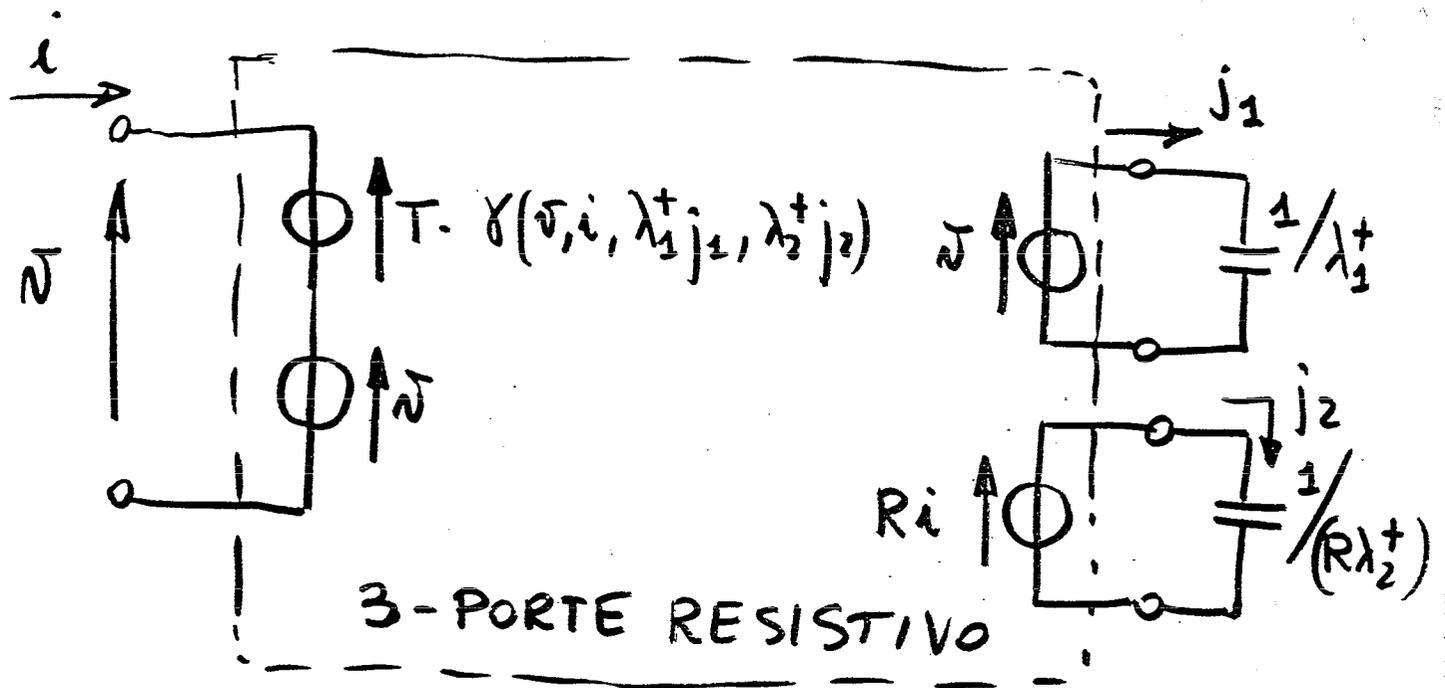


$$j_2 = \frac{1}{R \lambda_2^+} \cdot (R i^{(1)}) = \frac{i^{(1)}}{\lambda_2^+}$$

> la eq. costitutiva diventa

$$\gamma(v, i, \lambda_1^+ j_1, \lambda_2^+ j_2) = 0$$

la rete risultante è allora:



(R arbitrario)

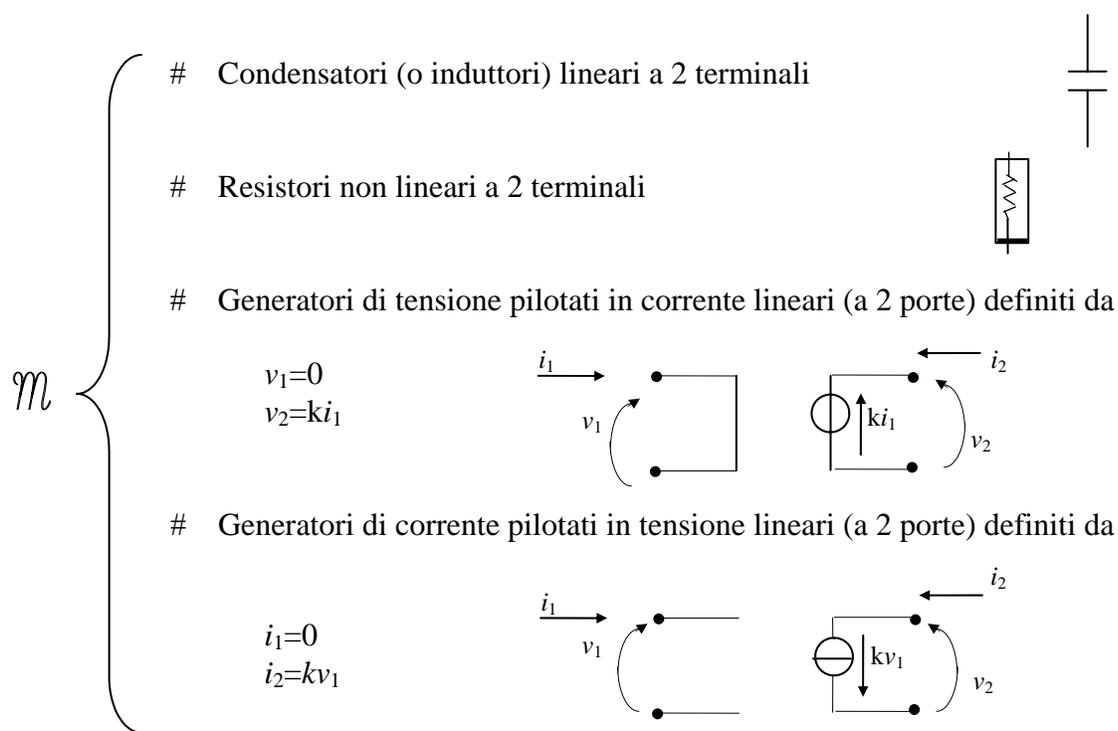
Il coefficiente T ($[T] = s$) rende il prodotto $T \cdot \gamma$ in Volt.

La funzione γ è non lineare nelle variabili "pilotate" v, i, j_1, j_2 . La sintesi del generatore pilotato $T \cdot \gamma(\cdot)$ si ottiene impiegando resistori non lineari (bipoli) e generatori pilotati lineari.

TEOREMA V

(insieme minimo di "blocchi da costruzione" (minimal basic building blocks))

Ogni elemento multi-terminale o multi-porta concentrato, descritto da una relazione costitutiva continua in ogni dominio chiuso e limitato si può sintetizzare usando solo un numero finito di elementi dell'insieme \mathcal{M} definito qui di seguito. L'affermazione del teorema è falsa se anche un solo elemento viene cancellato da \mathcal{M} .



Nota: i generatori pilotati lineari sono quelli "misti" dai quali si ottengono anche gli altri (v. seguito).

Dimostrazione:

è sufficiente mostrare che la rete \mathcal{E}_R ottenuta nel teorema IV è sintetizzabile impiegando solo elementi di \mathcal{M} .

Intanto osserviamo che un generatore di tensione pilotato in tensione oppure di corrente pilotato in corrente, non inclusi in \mathcal{M} , si ottiene mettendo opportunamente in cascata i due generatori "misti" inclusi in \mathcal{M} . Perciò ogni generatore lineare delle sintesi (i) , (e) , (i_x) , (v_x) è ottenibile dagli elementi di \mathcal{M} .

Resta la sintesi del generatore pilotato non lineare $f(\cdot)$: occorre provare che esso è ottenibile impiegando solo elementi di \mathcal{M} .

La prova è data dal teorema di Kolmogorov (*Amer. Math. Soc. Transl.* (2),28 (1963) pp.55-59, MR22 # 2669; 27 # 3760).

Il teorema di Kolmogorov afferma che: una $f(x_1, \dots, x_n) (\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^1)$ continua su ogni dominio chiuso e limitato può sempre essere decomposta, entro il cubo unitario

$I^n \subset \mathfrak{R}^n (I^n = [0,1] \times [0,1] \dots \times [0,1])$ come segue:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{2n+1} g_k \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{jk}(x_j) \right)$$

con $\begin{cases} g_k(\cdot) \\ \varphi_{jk}(\cdot) \end{cases}$ FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE

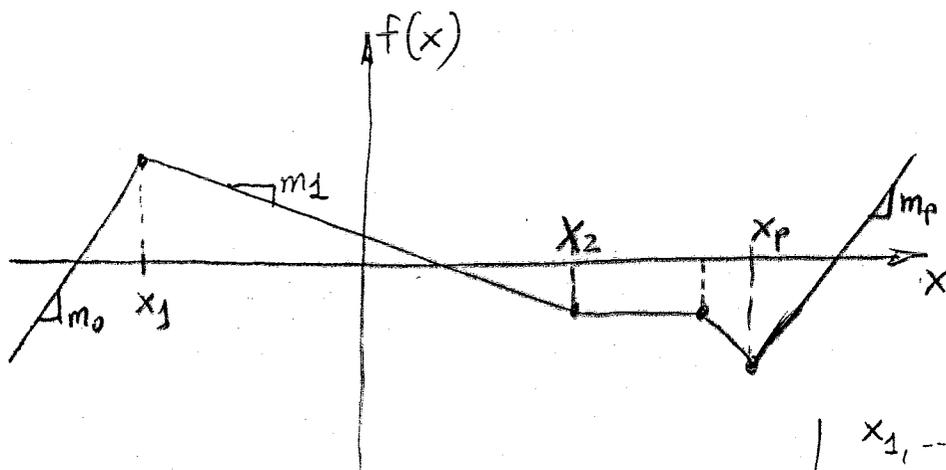
ora, ciascun termine dell'espressione può essere sintetizzato impiegando solo resistori a 2 terminali e generatori pilotati lineari (Chua e Lin "*Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques*", cap.2, Englewood Clif, NJ: Prentice-Hall, 1975). Ciò conclude la prova.

Commenti al teorema:

1. Lo sviluppo di $f(\cdot)$ secondo Kolmogorov impiega $n(2n+1)$ funzioni φ_{jk} e $2n+1$ funzioni g_k . Ciò stabilisce un LIMITE SUPERIORE al numero di elementi di CIASCUN TIPO in \mathcal{M} per la sintesi. È opportuno ricordare che la n della sommatoria in Kolmogorov è il numero di variabili della $f(\cdot)$ da sintetizzare e non va confusa con la simbologia usata nelle pagine precedenti.
2. L'importanza del teorema V è soprattutto concettuale, perché il numero di generatori pilotati per la sintesi di \mathcal{M} diventa facilmente troppo elevato. In pratica, allora, si rinuncia alla semplificazione offerta dal teorema, che ha per componenti resistivi bipoli e doppi bipoli (generatori pilotati) e si tenta di sintetizzare la parte resistiva come un p-porte (il multi-porte resistivo \mathcal{E}_R dello schema generale nel teorema IV).

SINTESI DI BIPOLI RESISTIVI CON CARATTERISTICA LINEARE A TRATTI (PWL)

piecewise-linear



x_1, \dots, x_p breakpoints (punti angolosi)
 m_0, \dots, m_p pendenze

Espressione canonica di Chua:

$$f(x) = a + bx + \sum_{i=1}^p c_i |x - x_i|$$

Poiché

$$f'(x) = b + \sum_{i=1}^p c_i \operatorname{sgn}(x - x_i) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_0 = b - \sum_{i=1}^p c_i \\ m_1 = b + c_1 - \sum_{i=2}^p c_i \\ \vdots \\ m_k = b + \sum_{i=1}^k c_i - \sum_{i=k+1}^p c_i \\ \vdots \\ m_p = b + \sum_{i=1}^p c_i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_0 + m_p = 2b \\ m_k - m_{k-1} = 2c_k \end{cases}$$

inoltre

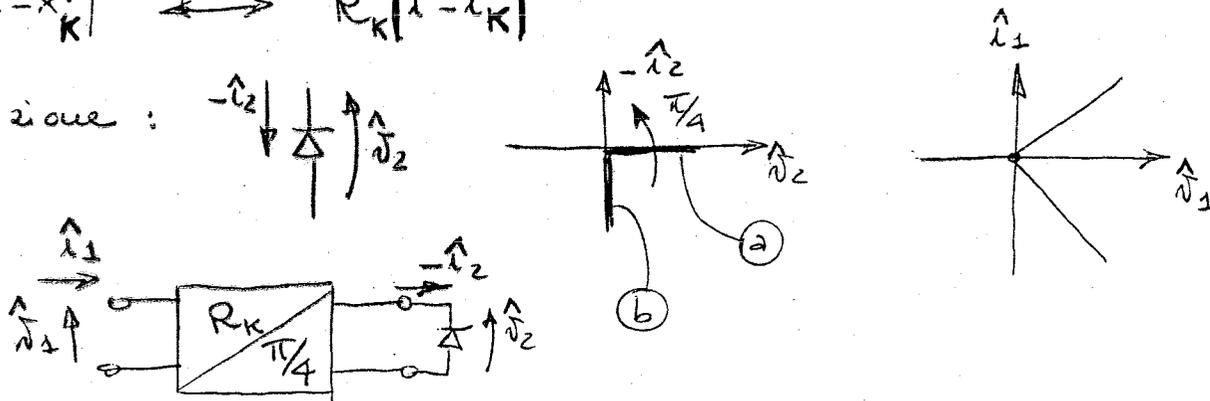
$$f(0) = a + \sum_{i=1}^p c_i |x_i| \quad \text{quindi}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} (m_0 + m_p) \\ c_k = \frac{1}{2} (m_k - m_{k-1}) \\ a = f(0) - \sum_{i=1}^p c_i |x_i| \end{cases}$$

si ottengono come risultato di una rotazione e di una traslazione.

1) $G_k |x - x_k| \longleftrightarrow R_k |i - i_k|$

rotazione:



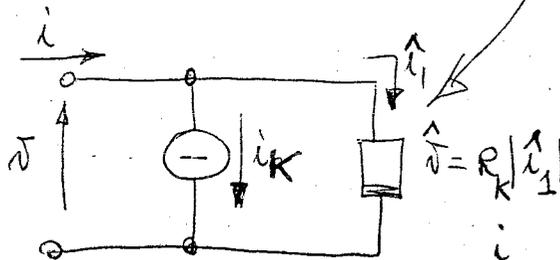
$$\begin{cases} \hat{i}_1 = \hat{i}_2 \cos \frac{\pi}{4} - R_k \sin \frac{\pi}{4} (-\hat{i}_2) = \frac{\hat{i}_2}{\sqrt{2}} + \frac{R_k \hat{i}_2}{\sqrt{2}} \\ \hat{i}_1 = \frac{\hat{i}_2}{R_k} \sin \frac{\pi}{4} - \hat{i}_2 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\hat{i}_2}{R_k \sqrt{2}} - \frac{\hat{i}_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

(a) $\hat{i}_2 = 0, \hat{i}_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{i}_1 = \frac{\hat{i}_2}{\sqrt{2}} > 0 \\ \hat{i}_1 = \frac{\hat{i}_2}{R_k \sqrt{2}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\hat{i}_1}{\hat{i}_1} = R_k \text{ con } \hat{i}_1, \hat{i}_1 >$

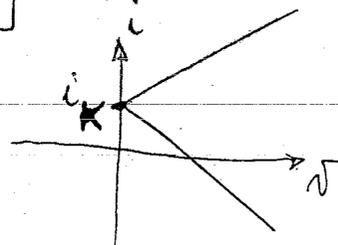
(b) $\hat{i}_2 = 0, -\hat{i}_2 < 0 \Rightarrow \hat{i}_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{i}_1 = \frac{R_k \hat{i}_2}{\sqrt{2}} > 0 \\ \hat{i}_1 = -\frac{\hat{i}_2}{\sqrt{2}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\hat{i}_1}{\hat{i}_1} = -R_k \Rightarrow \hat{i}_1 = -R_k \hat{i}_1 \text{ con } \hat{i}_1 < 0, \hat{i}_1 >$

in breve: $\hat{i}_1 = R_k |\hat{i}_1|$

traslazione

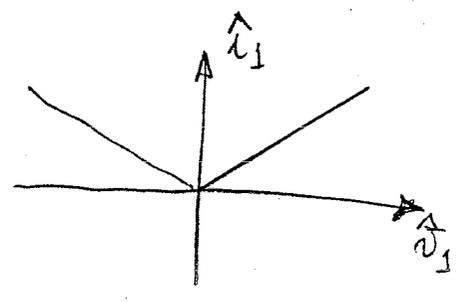
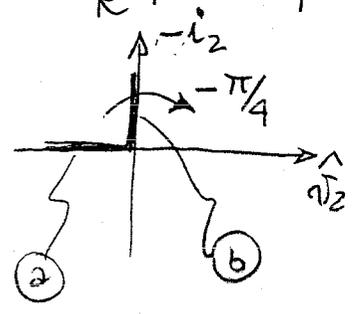
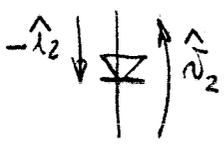


$\bar{i} = R_k |\hat{i}_1| = R_k |i - i_k|$



2) $C_k |x - x_k| \longleftrightarrow \frac{1}{R} |\nu - \nu_k|$

rotazione



$$\hat{\nu}_1 = \hat{\nu}_2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - R_k \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot (-\hat{i}_2) = \frac{\hat{\nu}_2}{\sqrt{2}} - R_k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \hat{i}_2$$

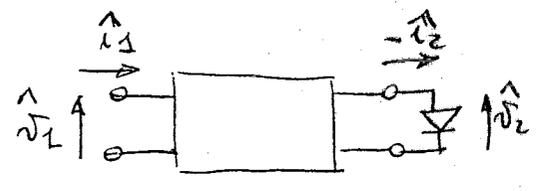
$$\hat{i}_1 = \frac{\hat{\nu}_2}{R_k} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \hat{i}_2 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\hat{\nu}_2}{\sqrt{2} R_k} - \frac{\hat{i}_2}{\sqrt{2}}$$

a) $\begin{cases} \hat{i}_2 = 0 \\ \hat{\nu}_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\nu}_1 = \frac{\hat{\nu}_2}{\sqrt{2}} < 0 \\ \hat{i}_1 = -\frac{\hat{\nu}_2}{\sqrt{2} R_k} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\nu}_1 = -R_k \hat{i}_1 \\ \hat{i}_1 > 0, \hat{\nu}_1 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \hat{\nu}_2 = 0 \\ \hat{i}_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\nu}_1 = -\frac{R_k}{\sqrt{2}} \hat{i}_2 < 0 \\ \hat{i}_1 = -\frac{\hat{i}_2}{\sqrt{2}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\nu}_1 = R_k \hat{i}_1 \\ \hat{\nu}_1 > 0 \\ \hat{i}_1 > 0 \end{cases}$

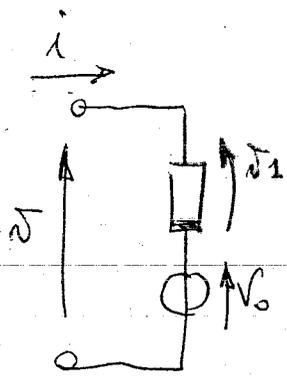
in breve

$$\hat{i}_1 = \frac{|\hat{\nu}_1|}{R_k}$$

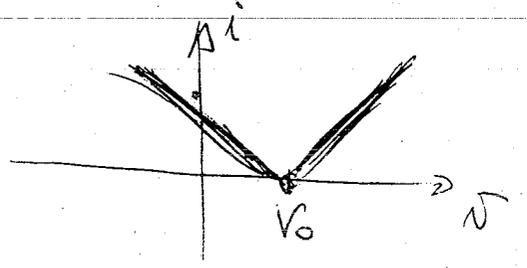


traslazione:

$$i = \frac{|\nu - \nu_0|}{R_k}$$

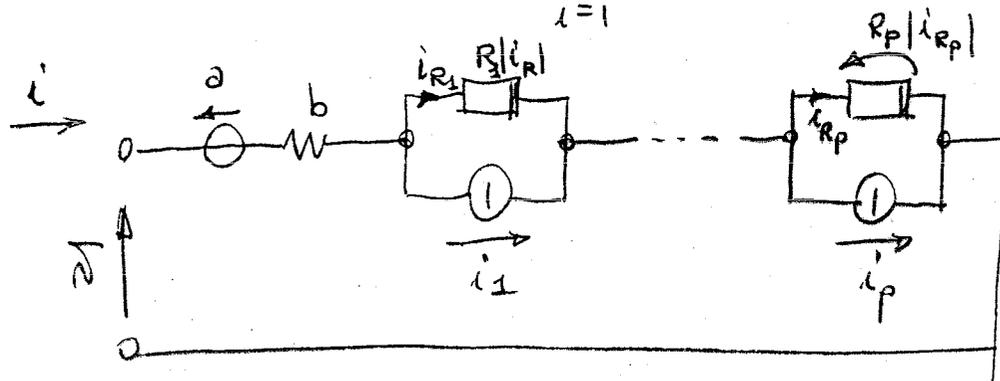


$$i = \frac{|\nu_1|}{R_k} = \frac{|\nu - \nu_0|}{R_k}$$

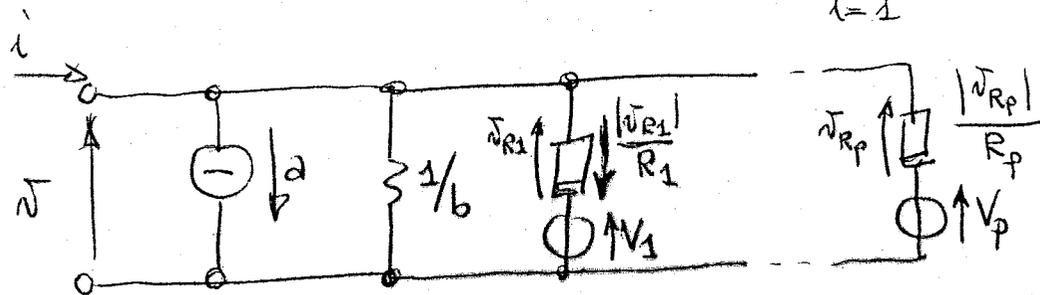


Suiteri:

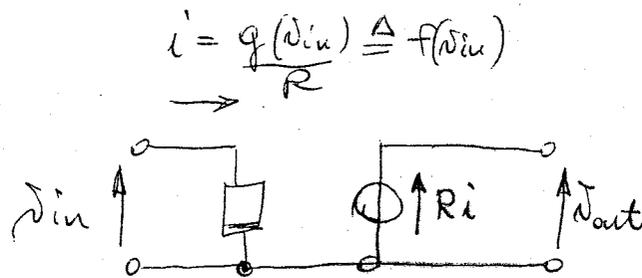
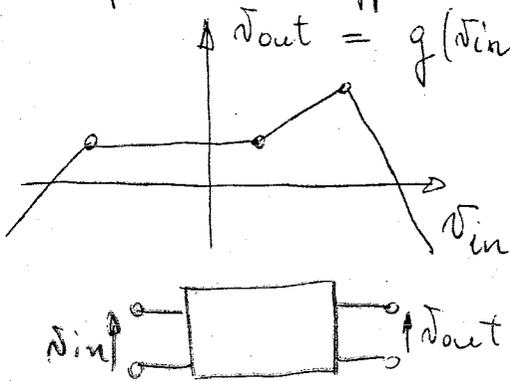
$$se \ v = f(i) = a + bi + \sum_{i=1}^p a |i - i_i|$$



$$se \ i = f(v) = a + b v + \sum_{i=1}^p a |v - V_i|$$



Esempio di applicazione

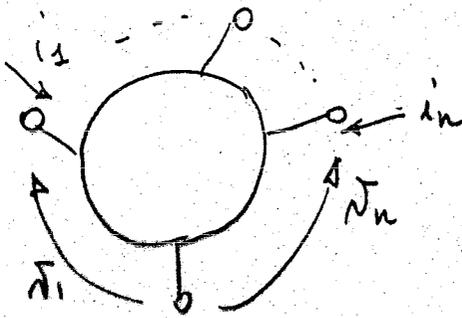


Sintesi di multiterminali resistivi con approssimazioni PWL (piecewise-linear)

$$i_k = f(x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, \dots, n)$$

oppure:

$$v_k = f(x_1, \dots, x_n)$$

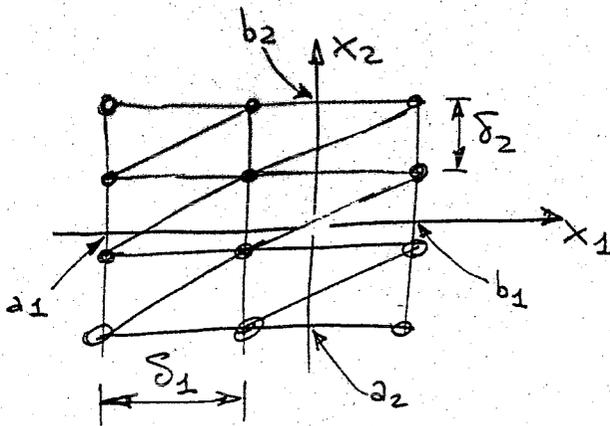


Si considera dunque il problema generale:

dato $f(x_1, \dots, x_n) = f(x) \quad x \in S \subset \mathbb{R}^n ; f(x) \in \mathbb{R}$

$$S: \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \quad i=1, \dots, n\}$$

determinare una approssimazione $\hat{f}(x)$ lineare a tratti partendo da una divisione simpliciale del dominio S . Esempio:



$$n=2$$

$$\delta_1 = \frac{b_1 - a_1}{m_1} \quad (m_1 = 2)$$

$$\delta_2 = \frac{b_2 - a_2}{m_2} \quad (m_2 = 3)$$

Si ottengono $\prod_{i=1}^n m_i$ (iper) poliedri

(qui $2 \times 3 = 6$ rettangoli)

Ogni poliedro contiene $n!$ simplessi (qui 2 triangoli)

Il dominio S con ripartito ha $N = \prod_{i=1}^n (m_i + 1)$ vertici (qui $3 \times 4 = 12$ vertici).

L'insieme dei vertici si chiama V_S :

$$V_S = \{v_j \in \mathbb{R}^n ; j=1, \dots, N\} \quad (\text{ordine dei pedici arbitrario})$$

Prodotto interno: $\langle f, g \rangle = \sum_{v_j \in V_S} f(v_j) g(v_j)$ individua uno spazio di Hilbert

L'approssimazione $\hat{f}(\underline{x})$ si esprime come

$$\hat{f}(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{\varphi}(\underline{x}) = \underline{\varphi}^T(\underline{x}) \underline{c}$$

ove \underline{c} è un vettore di N coefficienti e $\underline{\varphi}(\underline{x})$ un vettore di funzioni base lineari e tratti.

Si considerano due tipi di funzioni base: una edetta allo sviluppo dei calcoli che conducono all'approssimazione, l'altra in forte corrispondenza con le reti circuitali.

Basi ortogonali generali:

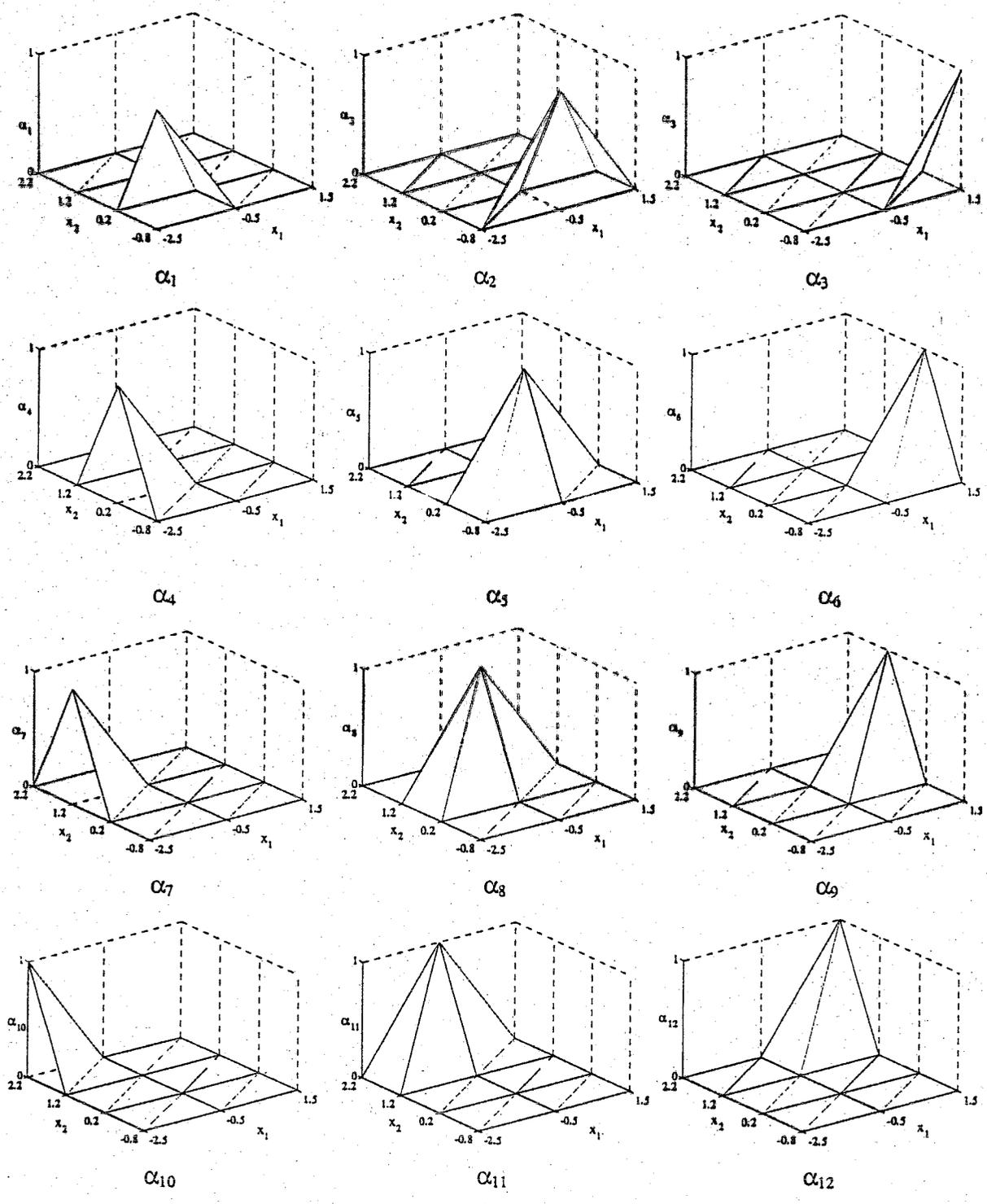
N funzioni $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_N(x)$ con $\alpha_i(\underline{x}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

ogni $\alpha_i(x)$ è una (IPER)PIRAMIDE con vertice in \underline{x}_i

$$\underline{\varphi}_g(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_N(x) \end{bmatrix}$$

$$\hat{f}(\underline{x}) = \underline{c}_g^T \underline{\varphi}_g(\underline{x}) = \underline{\varphi}_g^T(\underline{x}) \underline{c}_g$$

per l'esempio considerato, le funzioni sono $\alpha_1(x), \dots, \alpha_{12}(x)$ e sono rappresentate nelle figure seguenti



General orthonormal basis functions for the example domain S_e .

Il calcolo dei coefficienti (vettore \underline{c}_{qe}) si può fare seguendo un criterio di ottimizzazione

1. scelta di q ($> N$) campioni casuali di \underline{x} nel dominio S : $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_q$

2. calcolo di $f(\underline{x}_k)$ e di $\hat{f}(\underline{x}_k) = \underline{c}_{qe}^T \underline{\varphi}_{qe}(\underline{x}_k)$

per ogni k ($k=1, \dots, q$)

3. Definizione del funzionale \mathcal{J} :

$$\mathcal{J}(\underline{c}_{qe}) = \sum_{k=1}^q \left(\hat{f}(\underline{x}_k) - \underline{c}_{qe}^T \underline{\varphi}_{qe}(\underline{x}_k) \right)^2$$

4. Minimizzazione di \mathcal{J} rispetto alle componenti di \underline{c}_{qe} (es. con il metodo dei gradienti coniugati)

Basi standard

Le basi standard \bar{e} è costituita da funzioni $\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_N(x)$

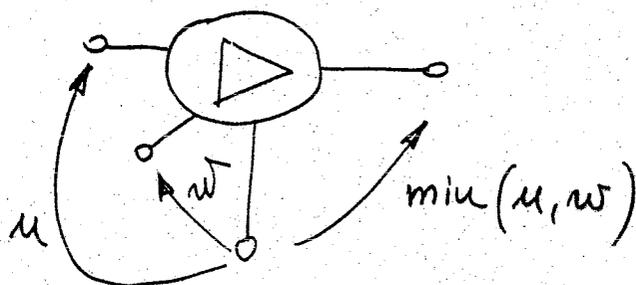
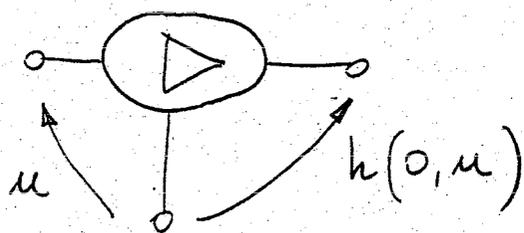
lineari e tratti come le $\alpha_i(x)$ ma "più vicine" alle interconnessioni. Esse si generano nel dominio S tramite annidamenti di due tipi di funzioni non lineari:

$$g(u, w) = \min(u, w)$$

$$h(u, w) = \max(u, w)$$

alle quali, se u e w sono tensioni, si

ponono per corrispondere multiterminali
 ritrivi:



La "costruzione" per annidamento è un po' macchinosa e non si ripete. Sembra invece più importante il criterio di paraggio delle basi ortonormali $\{\alpha_i(x)\}$ e quelle $\{\beta_j(x)\}$.

Definiamo

$$\underline{\psi}_{st}(x) = \begin{bmatrix} \beta_1(x) \\ \beta_2(x) \\ \vdots \\ \beta_N(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{f}(x) = \underline{c}_{ge}^T \underline{\psi}_{ge}(x) = \underline{\psi}_{ge}^T(x) \underline{c}_{ge}$$

allora:

$$\hat{f}(x) = \underline{c}_{ge}^T \underline{\psi}_{ge}(x) = \underline{c}_{st}^T \underline{\psi}_{st}(x);$$

Posto:

$$[\underline{\psi}_{ge}(v_k)] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underline{\psi}_{ge}(v_1) & \underline{\psi}_{ge}(v_2) & \dots & \underline{\psi}_{ge}(v_N) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_1(v_N) \\ \alpha_2(v_1) & \dots & \alpha_2(v_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_N(v_1) & \dots & \alpha_N(v_N) \end{bmatrix} = [\underline{I}]$$

$$[\underline{\psi}_{st}(v_k)] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underline{\psi}_{st}(v_1) & \underline{\psi}_{st}(v_2) & \dots & \underline{\psi}_{st}(v_N) \end{array} \right]$$

Si ha:

$$\underline{c}_{ge}^T \underline{\psi}_{ge}(v_k) = \underline{c}_{st}^T \underline{\psi}_{st}(v_k) \quad k = 1, \dots, N$$

che implica:

$$\underline{c}_{ge}^T \cdot [I] = \underline{c}_{st}^T [\Phi_{st}(V_s)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{c}_{st}^T = \underline{c}_{ge}^T [\Phi_{st}(V_s)]^{-1} \Rightarrow \text{sostituendo}$$

nella $\underline{c}_{ge}^T \underline{f}_{ge}(x) = \underline{c}_{st}^T \underline{f}_{st}(x)$ si ha

$$\underline{c}_{ge}^T \underline{f}_{ge}(x) = \underline{c}_{ge}^T [\Phi_{st}(V_s)]^{-1} \underline{f}_{st}(x)$$

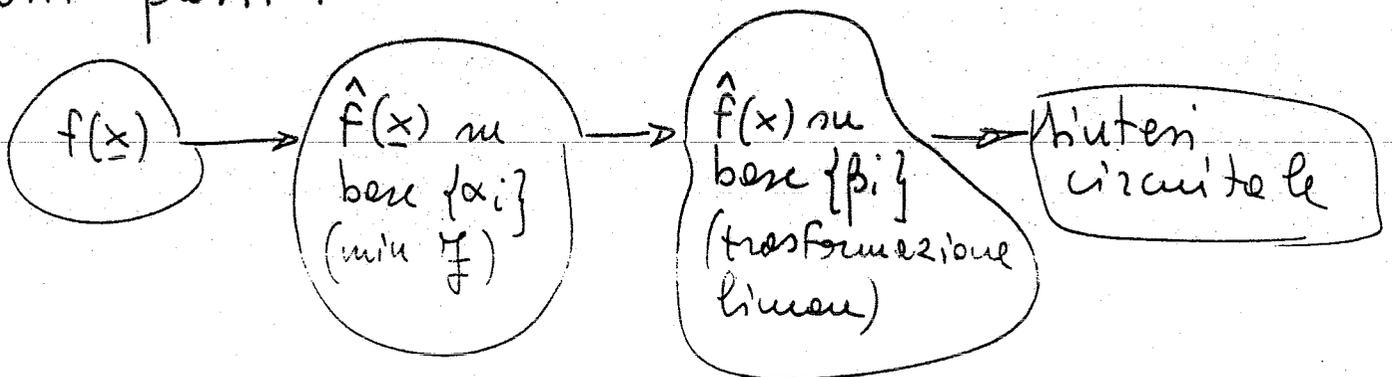
$$\underline{f}_{ge}(x) = [\Phi_{st}(V_s)]^{-1} \underline{f}_{st}(x) \Rightarrow$$

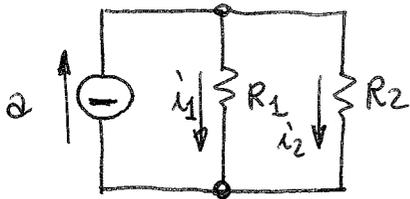
$$\Rightarrow \underline{f}_{st}(x) = [\Phi_{st}(V_s)] \underline{f}_{ge}(x)$$

perciò la matrice $\Phi_{st}(V_s)$ dei valori delle funzioni $\beta_k(x)$ sui vertici è la matrice di utile per il passaggio delle basi delle $\{\alpha_i\}$ alla base $\{\beta_i\}$.

Le relazioni è ovviamente valide per ogni base di N funzioni AVL indipendenti, e non solo per quelle $\{\beta_i\}$.

Le matrici avviene dunque secondo questi passi:





$$P_d = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \quad \text{pot. dissipata nei due resistori}$$

$$\text{vincolo: } a - i_1 - i_2 = 0$$

$$M_f(i_1, i_2, \lambda) = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 - \lambda(a - i_1 - i_2)$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial i_1} = 2R_1 i_1 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial i_2} = 2R_2 i_2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial \lambda} = -a + i_1 + i_2 = 0$$



$$\lambda = -2R_1 i_1$$

$$\lambda = -2R_2 i_2$$



$$R_1 i_1 = R_2 i_2 (= \nu)$$

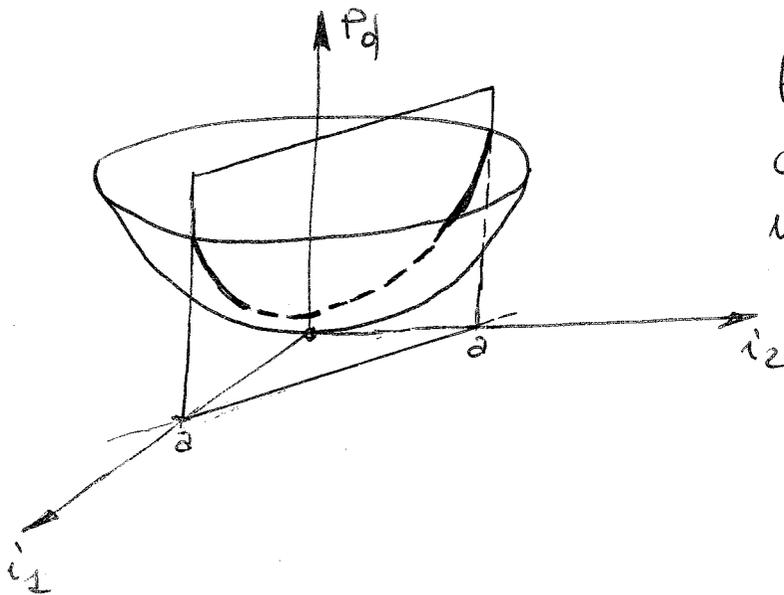
$$\lambda = -2R_1 i_1$$

$$i_1 + i_2 = a$$

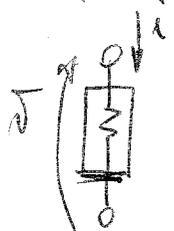
le correnti ammessibili corrispondono a un minimo di P_d :

$$\left[\frac{\partial^2 P_d}{\partial i_k \partial i_j} \right] = \begin{bmatrix} 2R_1 & 0 \\ 0 & 2R_2 \end{bmatrix}$$

definita positiva.



Per bipoli resistivi e per multiterminali resistivi (passivi reciproci) si possono definire funzioni potenziali

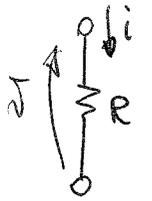


basse corrente: $\nu = \nu(i)$

funzione CONTENUTO $G(i) \triangleq \int_0^i \nu(z) dz = \int_0^1 \nu(is) \cdot i ds$

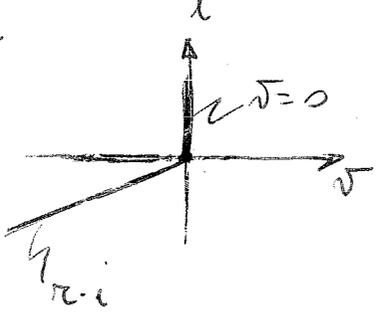
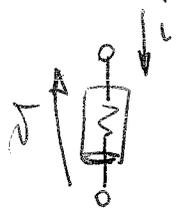
$$\boxed{\nu = \frac{dG}{di}}$$

Esempi:



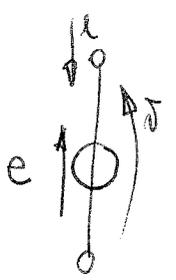
$$v = Ri; \quad G = \int_0^i R \cdot z \, dz = \int_0^1 R \cdot i \cdot i \, di = \frac{Ri^2}{2}$$

$$v = \frac{dG}{di} = Ri$$

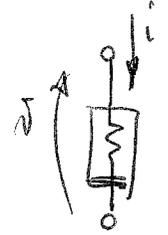


$$G(i) = \int_0^i v(z) \, dz = \begin{cases} 0 & \text{per } i > 0 \\ \frac{Ri^2}{2} & \text{per } i \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(i) = \frac{Ri^2}{2} \cdot 1(-i)$$



$$G(i) = \int_0^i e \, dz = e \cdot i$$



base tensione: $i = i(v)$

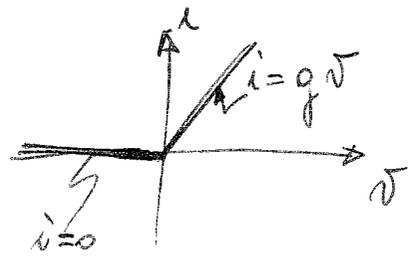
funzione CO-CONTENUTO $\bar{G}(v) \triangleq \int_0^v i(z) \, dz = \int_0^1 i(sv) \cdot v \, ds$

$$i = \frac{d\bar{G}}{dv}$$

Esempi:

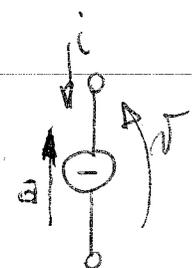


$$i = g v \Rightarrow \bar{G}(v) = \int_0^v g z \, dz = \frac{g v^2}{2}$$



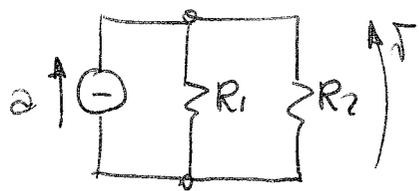
$$\bar{G}(v) = \int_0^v i(z) \, dz = \begin{cases} 0 & \text{per } v < 0 \\ \frac{1}{2} v^2 g & \text{per } v \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{G}(v) = \frac{1}{2} g v^2 \cdot 1(v)$$



$$\bar{G}(v) = \int_0^v i \, dz = \int_0^v -a \, dz = -a v$$

Nel circuito considerato in precedenza, ad esempio,



si possono considerare i co-contenuti dei tre bipoli e si ha

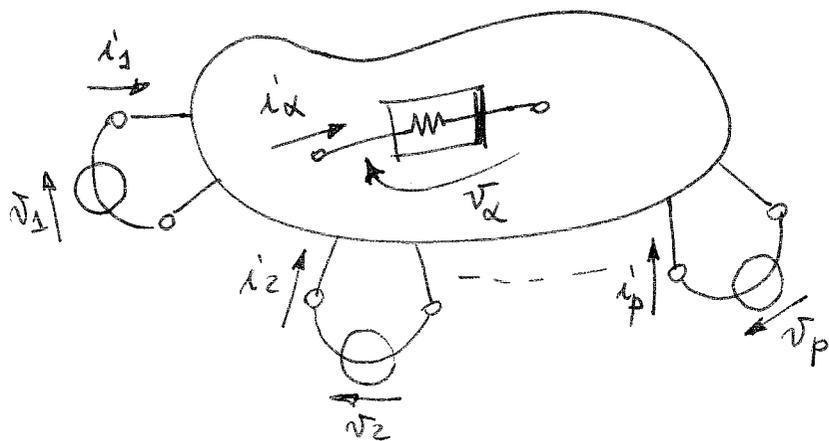
$$-aV + \frac{V^2}{2R_1} + \frac{V^2}{2R_2} = \mathcal{H}(V)$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dV} = -a + \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = 0 \quad \text{per } V = a \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{V}{R_1}; \quad i_2 = \frac{V}{R_2}$$

Questo esempio suggerisce che le funzioni potenziali (in questo caso i co-contenuti) sono sommabili in modo da generare una funzione delle variabili ammissibili.

Il teorema che segue dimostra che la funzione risultante può essere espressa in termini delle variabili descrittive (tensioni per il co-contenuto, correnti per il contenuto) del tratto di rete complementare.



Dimostrazione per il co-contenuto (quello per il contenuto è analogo).

H.p.: tratto di rete di bipoli resistivi definiti in basse tensione; accessibile da p porte.

Sia \bar{G}_α il co-contenuto del resistore α -esimo:

$$i_\alpha = \frac{d\bar{G}_\alpha}{dv_\alpha}$$

Chiediamo le p porte con altrettanti generatori v_1, \dots, v_p

Consideriamo un insieme di tensioni e uno di correnti 4 compatibili col grafo del circuito rinvoltente. Scegliamo

$$-i_1, -i_2, \dots, -i_p \quad \{i_\alpha\}$$

$$d\bar{v}_1, d\bar{v}_2, \dots, d\bar{v}_p \quad \{d\bar{v}_\alpha\} \quad \leftarrow \text{i differenziali, invece delle tensioni "finite".}$$

Per il teorema di Tellegen questi due insiemi individuano due vettori ortogonali:

$$\underbrace{-i_1 d\bar{v}_1 - i_2 d\bar{v}_2 - \dots - i_p d\bar{v}_p}_{\sum_{k=1}^p i_k d\bar{v}_k} + \sum_{\alpha} i_{\alpha} d\bar{v}_{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^p i_k d\bar{v}_k}_{\substack{\uparrow \\ \text{come } \bar{G}}} = \underbrace{\sum_{\alpha} i_{\alpha} d\bar{v}_{\alpha}}_{\substack{\uparrow \\ \text{come } d\bar{G}}} = \sum_{\alpha} \frac{d\bar{G}_{\alpha}}{d\bar{v}_{\alpha}} d\bar{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{v}_{\alpha}} d\bar{v}_{\alpha} = d\bar{G}$$

con $\bar{G} = \sum_{\alpha} \bar{G}_{\alpha}$

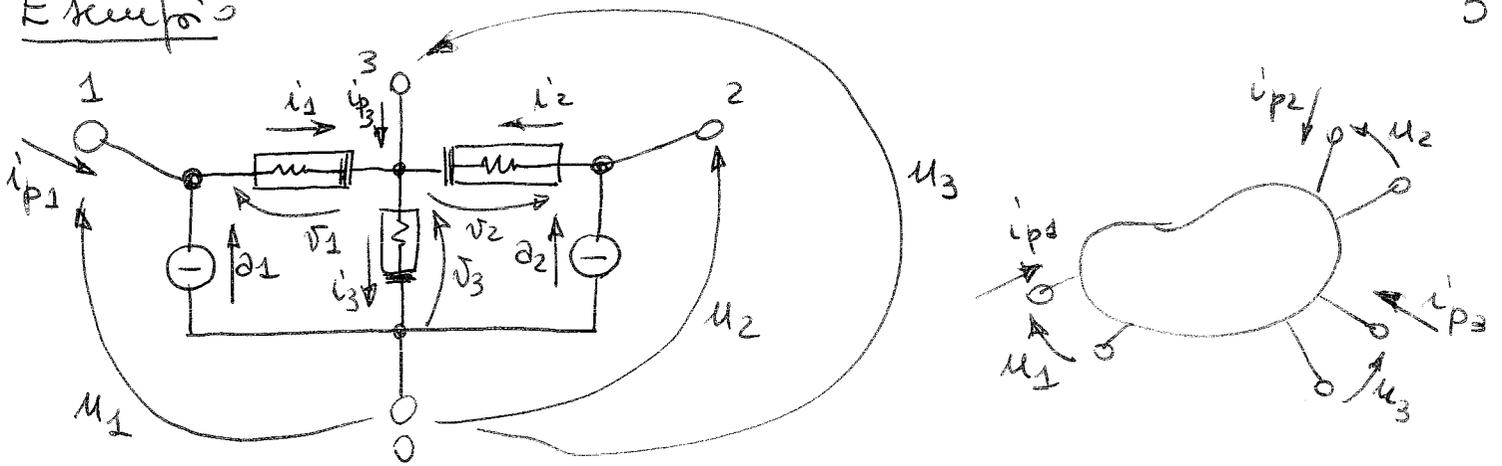
ricome il 2° membro è il differenziale esatto di \bar{G} , anche il primo membro lo è. Si deduce allora che

$$\bar{G} = \sum_{k=1}^p \int_0^{\bar{v}_k} i_k dz_k \quad (*)$$

quindi:

il co-contenuto del tronco di rete a p-porte è esprimibile attraverso la (*) oppure attraverso la somma dei co-contenuti dei resistori interni al tronco di rete.

Esempio



i co-contenuti dei tre resistori siano $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$:

$$i_\alpha \downarrow \uparrow v_\alpha \quad i_\alpha = \frac{\partial \bar{G}_\alpha}{\partial v_\alpha} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

Sagliando le tensioni nodali u_1, u_2, u_3 si possono esprimere le tensioni di lato in funzione di esse, in modo che siano sempre compatibili col graf. La funzione di co-contenuto del tratto di rete eccesibile delle tre parti è

$$\bar{G}(u_1, u_2, u_3) = \bar{G}_1(u_1 - u_3) + \bar{G}_2(u_2 - u_3) + \bar{G}_3(u_3) + (-a_1 u_1) + (-a_2 u_2)$$

e si ha:

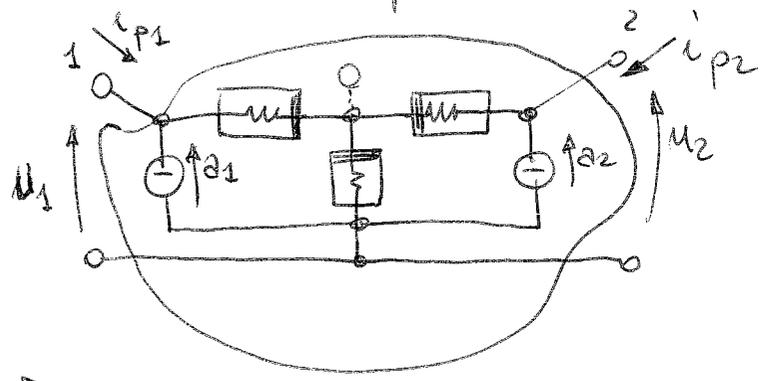
$$i_{p1} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial u_1} = -a_1 + \frac{d\bar{G}_1}{du_1} = -a_1 + i_1$$

$$i_{p2} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial u_2} = -a_2 + \frac{d\bar{G}_2}{du_2} = -a_2 + i_2$$

$$i_{p3} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial u_3} = \frac{d\bar{G}_1}{d(u_1 - u_3)} \cdot \frac{d(u_1 - u_3)}{du_3} + \frac{d\bar{G}_2}{d(u_2 - u_3)} \cdot \frac{d(u_2 - u_3)}{du_3} + \frac{d\bar{G}_3}{du_3} = -i_1 - i_2 + i_3$$

si noti che le leggi di Kirchhoff sulle correnti sono automaticamente soddisfatte.

Se ora si usa la stessa struttura circuitale per definire, ad esempio, il due porte:



la funzione \bar{G} non muta, e la descrizione del due-porte impegna le prime due equazioni scritte per il caso precedente

$$i_{p1} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial u_1}$$

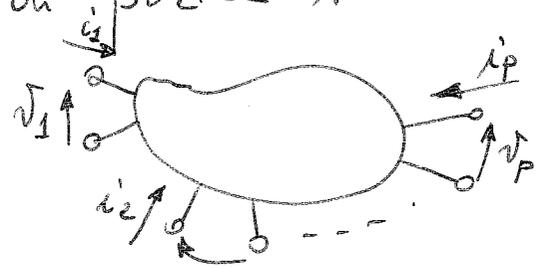
$$i_{p2} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial u_2}$$

mentre la terza non compare, poiché associata a i_{p3} che qui è $\equiv 0$.

Proprietà

Si consideri un multiporale per il quale è definibile una funzione di co-contenuto \bar{G} . Allora \bar{G} dipende dalle p tensioni di porta v_1, v_2, \dots, v_p e le correnti di porta sono date da

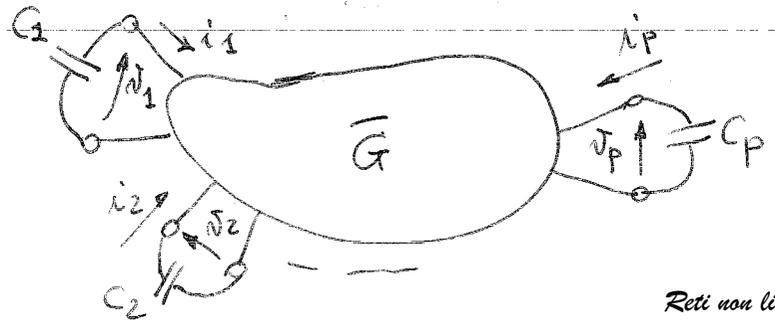
$$i_k = \frac{\partial \bar{G}}{\partial v_k} \quad k = 1, \dots, p$$



Collegando alle porte condensatori C_1, \dots, C_p si ha:

$$i_k = -C_k \frac{dv_k}{dt}$$

quindi:

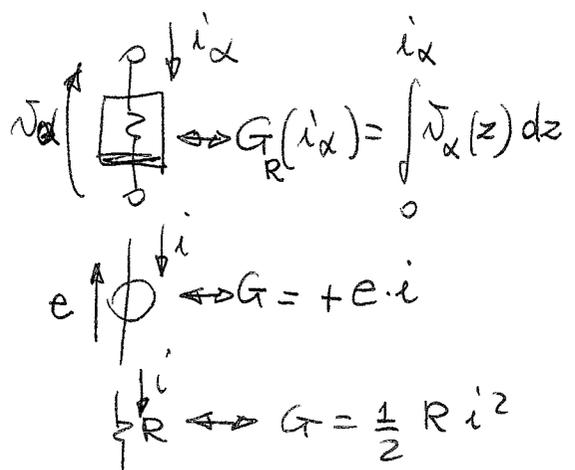
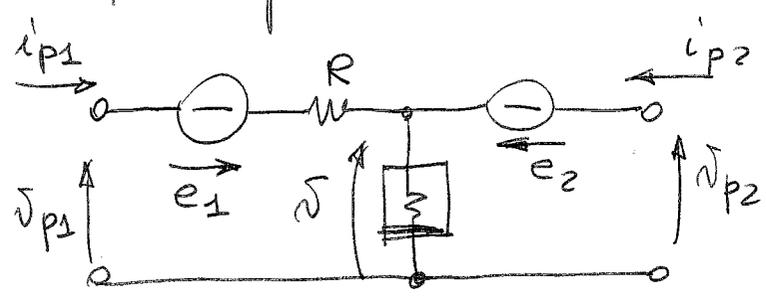


$$-C_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{v}_k} \quad k = 1, \dots, p$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{G}}{dt} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{v}_k} \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^p -C_k \left(\frac{d\bar{v}_k}{dt} \right)^2 \leq 0 \quad \forall t$$

perciò l'evoluzione dello stato del circuito risultante fa diminuire la funzione di co-contenuto fino a un punto di stazionarietà. In tale punto le $\frac{d\bar{v}_k}{dt} = 0 \Rightarrow$ le i_k di porta vanno a zero.

Un esempio nella funzione di contenuto di un multiporatore



Le correnti dei vari elementi possono essere espresse subito in termini di i'_{p1} e i'_{p2} (in questo modo sono automaticamente compatibili).

Si ha allora

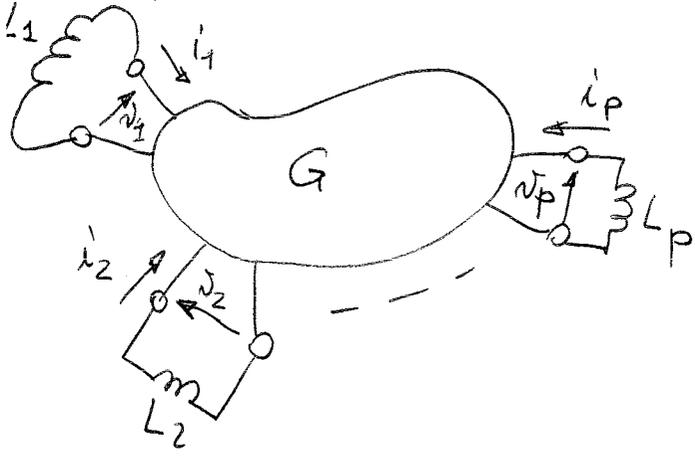
$$G = e_1 \cdot (-i'_{p1}) + \frac{1}{2} R i'_{p1}{}^2 + G_R(i'_{p1} + i'_{p2}) + e_2 \cdot (-i'_{p2}) = -e_1 i'_{p1} + \frac{1}{2} R i'_{p1}{}^2 + G_R(i'_{p1} + i'_{p2}) - e_2 i'_{p2}$$

per cui:

$$v'_{p1} = \frac{\partial G}{\partial i'_{p1}} = -e_1 + R i'_{p1} + N$$

$$v'_{p2} = \frac{\partial G}{\partial i'_{p2}} = N - e_2$$

Proprietà



Se per il multiporata è definita la funzione di contenuto G , si ha

$$v_k = \frac{\partial G}{\partial i_k}$$

Inoltre, per gli induttori connessi alle porte si scrive

$$v_k = -L_k \frac{di_k}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dt} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial G}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} = \sum_{k=1}^p -L_k \left(\frac{di_k}{dt} \right)^2 \leq 0 \quad \forall t$$

perciò l'evoluzione dello stato del circuito risultante fa diminuire la funzione di contenuto fino a un punto di stazionarietà.

In tale punto $\frac{di_k}{dt} = 0 \quad k=1, \dots, p \Rightarrow$ le v_k di parte vanno a zero.

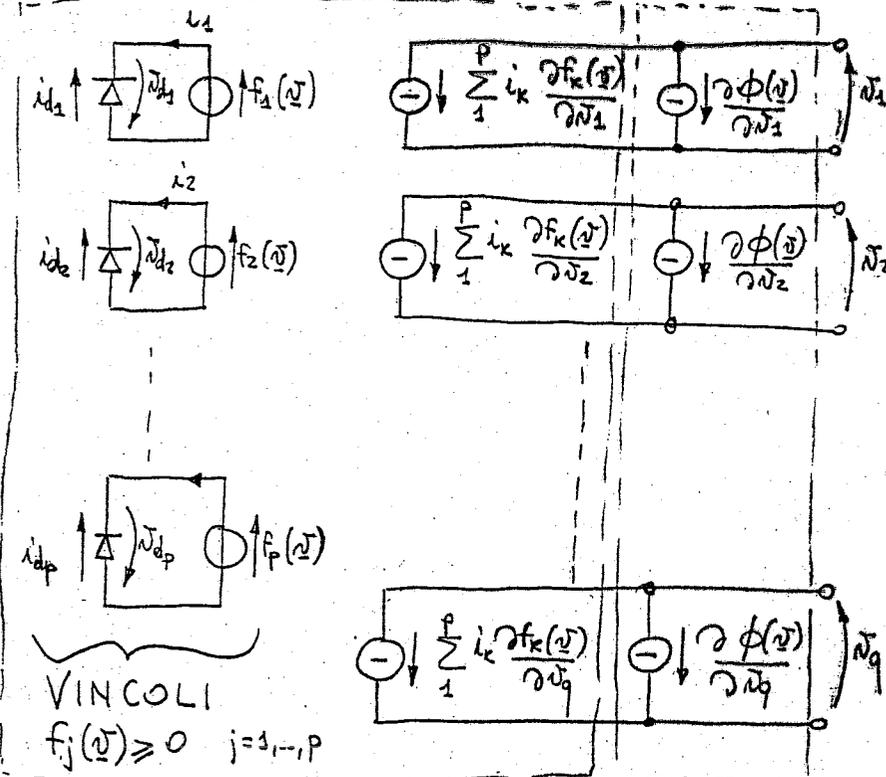
Circuiti per la programmazione non lineare

Il problema generale è il seguente:

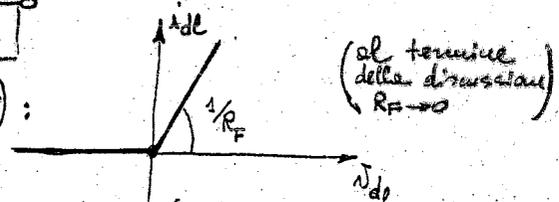
minimizzare una funzione SCALARE $\phi(x_1, x_2, \dots, x_q)$

sogetta ai vincoli: $f_j(x_1, x_2, \dots, x_q) \geq 0 \quad j=1, \dots, P$

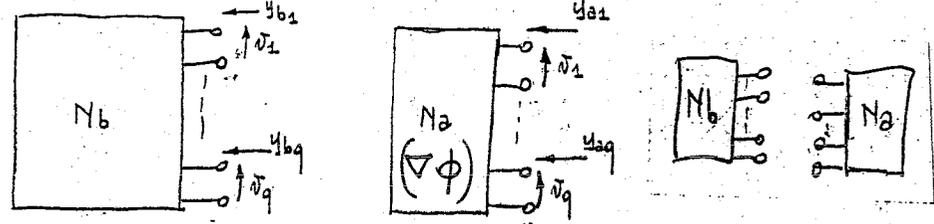
Un circuito che risolve il problema è, posto $x_k \leftrightarrow v_k$:



I diodi hanno la caratteristica (R_F parametro):
la caratteristica verrà indicata come $i_{dl} = g(v_{dl})$



Il circuito viene ripartito in due q-porte resistive (tutte porte quante)



le variabili $(x_1, \dots, x_q) \leftrightarrow (v_1, \dots, v_q)$ rispetto alle quali si deve ottimizzare.

Si sa che N_b e N_a sono reciproci, alle porte monostanti, la loro struttura interna contiene generatori pilotati. Infatti

Per N_a :

$$\frac{\partial y_{am}}{\partial v_n} = + \frac{\partial}{\partial v_n} \left[+ \frac{\partial \phi(v)}{\partial v_m} \right] \equiv \frac{\partial y_{an}}{\partial v_m} \quad \text{che è la definizione di reciprocità}$$

Per N_b , osservando che $i_k = -i_{dk} = -g(\dot{v}_{dk}) = -g[-f_k(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q)]$ si ha

$$y_{bj} = + \sum_{k=1}^p i_k \frac{\partial f_k(\dot{v})}{\partial \dot{v}_j} = \sum_{k=1}^p -g[-f_k(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q)] \frac{\partial f_k(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q)}{\partial \dot{v}_j} \quad j=1, \dots, q$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial y_{bm}}{\partial \dot{v}_n} = + \frac{\partial}{\partial \dot{v}_n} \sum_{k=1}^p -g[-f_k(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q)] \frac{\partial f_k(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q)}{\partial \dot{v}_m} =$$

$$= - \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial g}{\partial f_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \dot{v}_n} \right) \frac{\partial f_k}{\partial \dot{v}_m} + g[-f_k] \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{v}_n \partial \dot{v}_m}$$

scrivere in $-f_k$ in
entrambi i fattori: $\frac{\partial g}{\partial (-f_k)} \cdot \frac{\partial (-f_k)}{\partial \dot{v}_n}$

$$\frac{\partial y_{bm}}{\partial \dot{v}_m} = + \frac{\partial}{\partial \dot{v}_m} \sum_{k=1}^p -g[-f_k(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q)] \cdot \frac{\partial f_k(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q)}{\partial \dot{v}_n} =$$

$$= - \sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial g}{\partial f_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \dot{v}_m} \right) \frac{\partial f_k}{\partial \dot{v}_n} + g[-f_k] \frac{\partial^2 f_k}{\partial \dot{v}_m \partial \dot{v}_n}$$

sono
reciproci!
 \Downarrow
 N_b è reciproca

È con dimostrato che N_a e N_b sono reciproci, (le loro matrici Jacobiane sono simmetriche). Inoltre, si è Na che N_b sono definite sulla stessa base, cioè la base tensoriale \Rightarrow sono definitivi

i CO-CONTENUTI:

$$P_a(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q) = \int_0^{\dot{v}} y_a(\dot{v}) d\dot{v} = \int_0^{\dot{v}} \sum_{k=1}^q \frac{\partial \phi}{\partial \dot{v}_k} d\dot{v}_k = \phi(\dot{v})$$

$$P_b(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q) = \int_0^{\dot{v}} y_b(\dot{v}) d\dot{v} = \sum_{j=1}^q \left[\int_0^{\dot{v}_j} \left(\sum_{k=1}^p -g[-f_k] \frac{\partial f_k}{\partial \dot{v}_j} \right) d\dot{v}_j =$$

$$= \sum_{k=1}^p \left[\int_0^{\dot{v}_j} -g[-f_k] \underbrace{\sum_{j=1}^q \frac{\partial f_k}{\partial \dot{v}_j} d\dot{v}_j}_{df_k} \right] = \sum_{k=1}^p \int_0^{-f_k} -g[-f_k] df_k = \sum_{k=1}^p \int_0^{\dot{v}_{dk}} \underbrace{g(\dot{v}_{dk})}_{-f_k = +\dot{v}_{dk}} d\dot{v}_{dk}$$

CO-CONTENUTO
DEL DIODO
k-esimo
($k=1, \dots, p$)

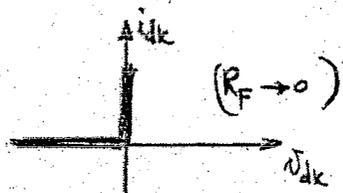
La funzione potenziale complessiva dovuta alle connessioni di N_a e N_b è allora

$$P = \phi(\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_q) + \sum_{k=1}^p \int_0^{\dot{v}_{dk}} g(\dot{v}_{dk}) d\dot{v}_{dk}$$

Ora:

line $P(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q) = \phi(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$
 $R_F \rightarrow 0$

perché i co-coefficienti dei resistori non lineari in N_b (gli integrali $\int g(\bar{v}_k) d\bar{v}_k$) vanno a zero, dato che le caratteristiche dei diodi diventano:



(ciò evidenzia, fra l'altro, che il co-coefficiente di un diodo ideale è zero)

La soluzione $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$ del circuito è un punto di stazionarietà della funzione scalare $\phi(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_q)$.

Se ϕ ha un solo punto stazionario e questo è un minimo, la soluzione individuata nel (del) circuito è il minimo globale di ϕ .