



# Scuola Nazionale Dottorandi di Elettrotecnica “Ferdinando Gasparini”

## Problema 1:

Controllo della posizione e della forma  
di un plasma assisimmetrico all’equilibrio

- Equazioni di Maxwell in regime quasi-stazionario

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Legge di Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Equazioni della termo-fluido-dinamica, singolo fluido

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{conservazione massa}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad \text{conservazione momento}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad \text{processo adiabatico}$$

- MHD ideale  $\rightarrow \sigma = \infty$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

In condizioni stazionarie

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p$$

perciò

$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$ : le superfici magnetiche sono anche superfici isobare

$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0$ : Le linee di corrente giacciono su superfici isobare, cioè su superfici magnetiche

NB: d'ora in poi consideriamo geometria assisimmetrica (2D)

⌘ Coordinate cilindriche (R, φ, z)

def.: funzione flusso poloidale : Ψ

Ψ è il flusso concatenato con la circonferenza passante per il punto P(R,z) e con centro sull'asse z

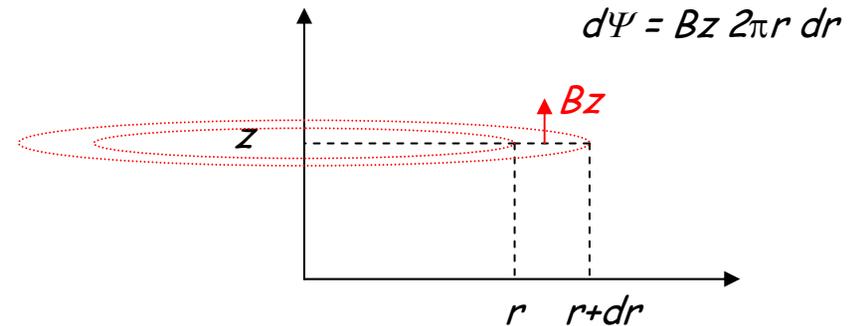
⌘ Più frequentemente si usa  $\psi = \frac{\Psi}{2\pi}$

⌘ Poichè le superfici magnetiche sono isobare, p = (Ψ)

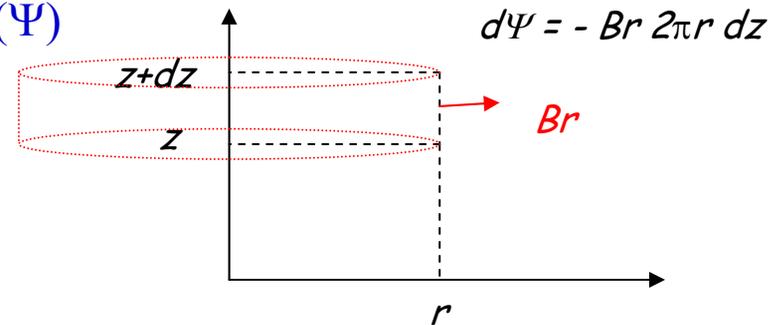
⌘ Componenti di campo poloidale

$$B_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}$$

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$



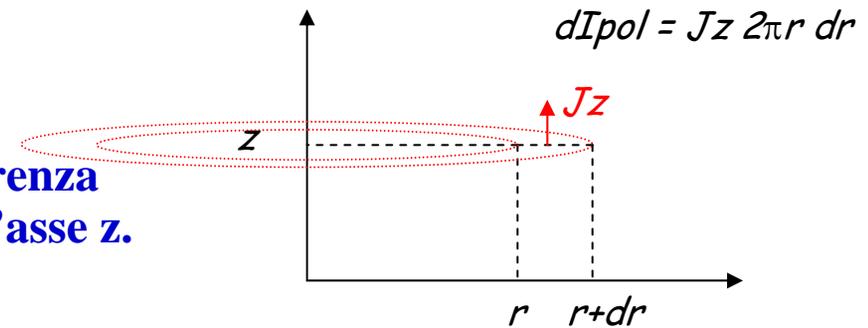
Imponendo  $\text{div } \mathbf{B} = 0$



⌘ Coordinate cilindriche  $(R, \varphi, z)$

def.: funzione corrente poloidale ( $I_{POL}$ ):

$I_{POL}$  è la corrente concatenata con la circonferenza passante per il punto  $P(R, z)$  e con centro sull'asse  $z$ .



⌘ Legge di Ampère

$$B_\varphi = \frac{\mu I_{POL}}{2\pi R}$$

⌘ Normalmente si usa

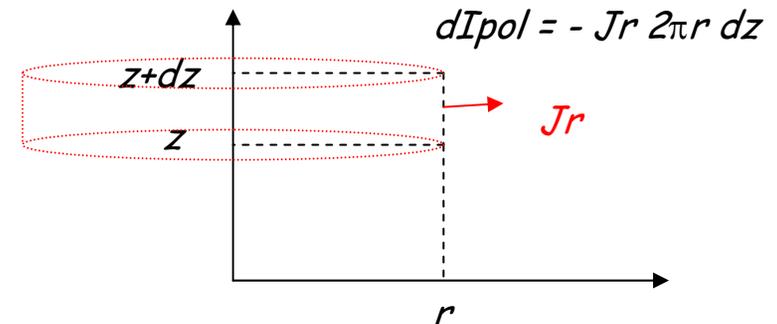
$$f(R, z) = \frac{\mu I_{POL}}{2\pi} = RB_\varphi(R, z)$$

⌘ Componenti di densità di corrente

$$J_z = \frac{1}{\mu R} \frac{\partial f}{\partial R}$$

$$J_R = -\frac{1}{\mu R} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Imponendo  $\text{div } \mathbf{J} = 0$



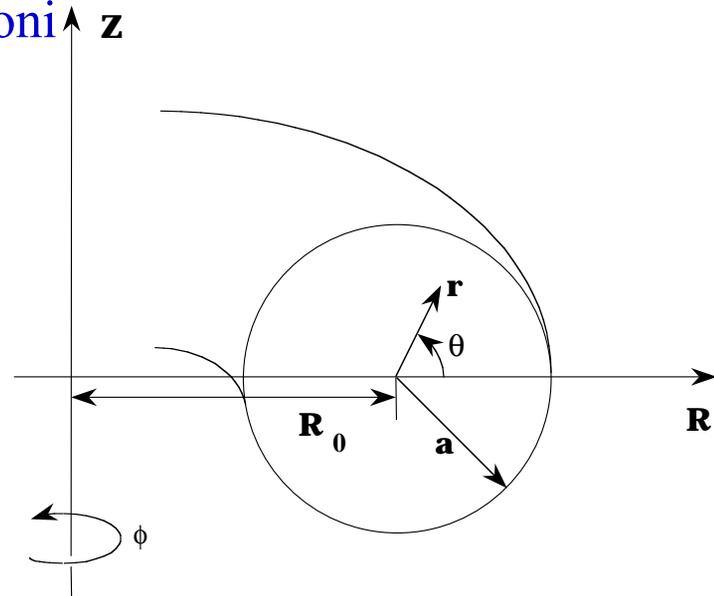
$$R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -f \frac{df}{d\psi} - \mu R^2 \frac{dp}{d\psi}$$

## Soluzione numerica

Soluzione analitica possibile in condizioni geometricamente semplici

- plasma circolare
- elevato rapporto d'aspetto

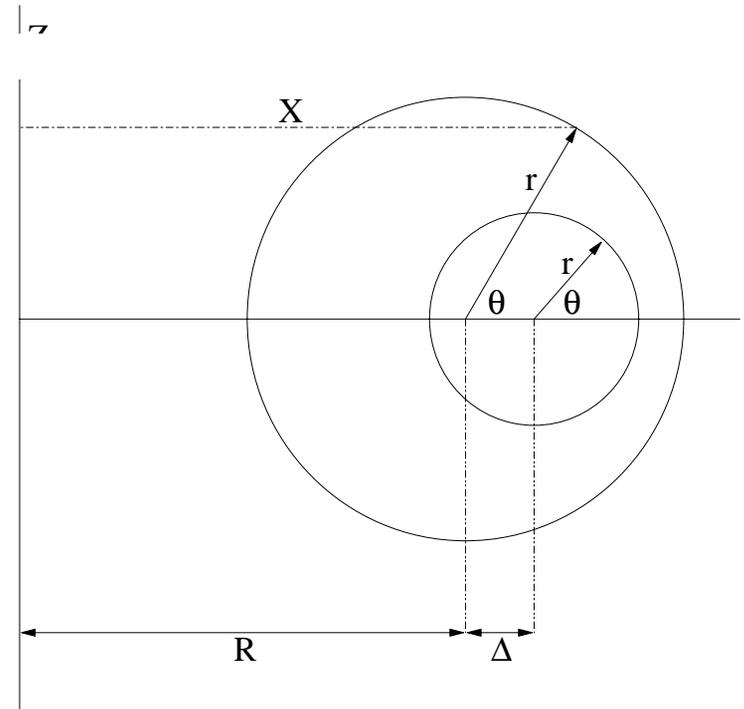
Sistema di coordinate quasi-cilindrico



- ⌘ Le superfici di flusso  $\psi(r, \vartheta) = \text{cost}$  sono circonferenze con centro che si sposta verso l'esterno al diminuire del loro raggio
- ⌘ Questo corrisponde a  $B\vartheta$  maggiore all'esterno per contrastare l'espansione
- ⌘ All'equilibrio, il campo poloidale sulla superficie del plasma è

$$B_{\vartheta}(a, \vartheta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(1 + \frac{a}{R_0} \Lambda \cos \vartheta\right)$$

$$\Lambda = \beta_{\vartheta} + \frac{\ell_i}{2} - 1$$



- ⌘ Il campo all'esterno del plasma non dipende dai dettagli della distribuzione di  $p$  e  $\mathbf{J}$ , ma solo da parametri integrali

Per mantenere l'equilibrio orizzontale del plasma,  
è necessario un campo:

$$B_z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi \pi_0} \left( \ln \frac{8R_0}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right)$$

- ⌘ Prodotto dalle sole sorgenti di campo esterne
- ⌘ Proporzionale alla corrente di plasma
- ⌘ Crescente al crescere di  $\Lambda$
- ⌘ Uniforme nelle ipotesi assunte

“Non è possibile sostenere alcun equilibrio MHD  
in assenza di correnti esterne al plasma”

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p \iff \nabla \cdot \vec{T} = 0$$

dove

$$\vec{T} = \left( p + \frac{B^2}{2\mu} \right) \vec{I} - \frac{B\mathbf{B}}{\mu}$$

$$\int_V \left( 3p + \frac{B^2}{2\mu} \right) dV = \int_{\partial V} (\mathbf{r} \cdot \vec{T}) \cdot \mathbf{n} dS$$

## Caso ideale

- Avvolgimenti sottili distribuiti su una circonferenza di raggio  $b$ , concentrica al plasma

$$i(\vartheta) = i_0 + \sum_{n=1}^N i_n \cos n \vartheta \quad [\text{A/m}]$$

- Avvolgimento disaccoppiato dal trasformatore

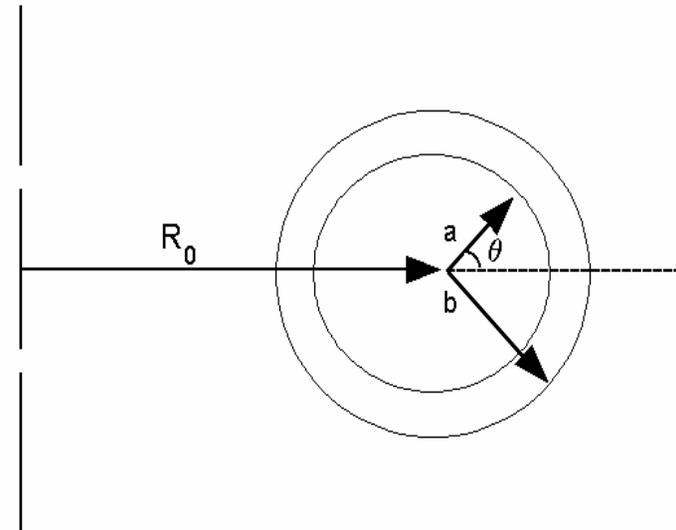
$$i_0 = 0$$

- Consideriamo la prima armonica  $i_1$
- Imponiamo sul raggio  $b$  le condizioni al contorno

$$B_{\vartheta i}(b) - B_{\vartheta e}(b) = \mu_0 i_1 \cos \vartheta$$

$$B_{ri}(b) = B_{re}(b)$$

- Si ottiene un campo verticale  $B_z = \mu_0 i_1 / 2$



## Caso semi-ideale

- Correnti concentrate in un numero finito di conduttori filiformi
- **Distribuzione 1:** 4 conduttori posizionati a  $\vartheta = \pi/4, 3\pi/4, -3\pi/4, -\pi/4$  e percorsi dalla corrente  $I_1$

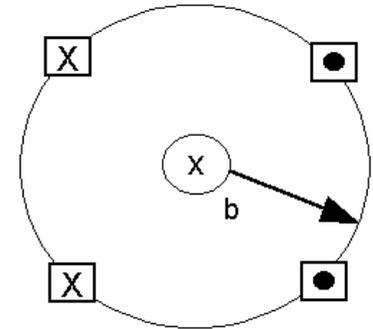
$$i(\vartheta) = \frac{I_1}{b} \left[ -\delta(\vartheta - \pi/4) - \delta(\vartheta + \pi/4) + \delta(\vartheta - 3\pi/4) + \delta(\vartheta + 3\pi/4) \right]$$

- Campo di dipolo
- Sviluppo in serie di Fourier

$$i_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi b} I_1$$

$$B_z = \mu_0 i_1 / 2 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi b} I_1$$

La sezione della colonna di plasma rimane circolare



- **Distribuzione 2:** 4 conduttori posizionati a

$$\vartheta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$$

e percorsi dalla corrente  $I_\varepsilon$

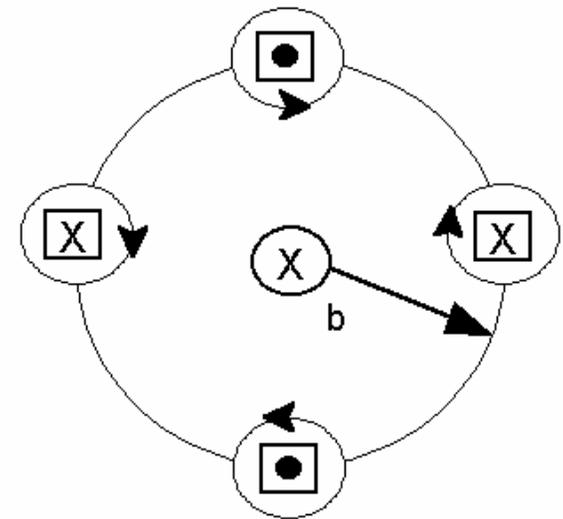
$$i(\vartheta) = \frac{I_\varepsilon}{b} [\delta(\vartheta) - \delta(\vartheta - \pi/2) + \delta(\vartheta - \pi) - \delta(\vartheta + \pi/2)]$$

- Campo di quadrupolo
- Sviluppo in serie di Fourier

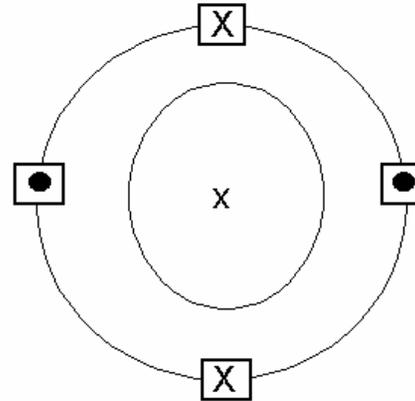
$$i_\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\vartheta) \cos 2\vartheta d\vartheta = \frac{4I_\varepsilon}{\pi b}$$

- In presenza di  $i_\varepsilon$  la sezione della colonna di plasma diventa ellittica

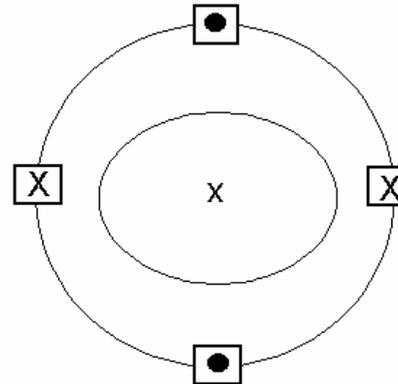
$$\varepsilon = f(i_\varepsilon / i_1)$$



- $i_\varepsilon > 0$

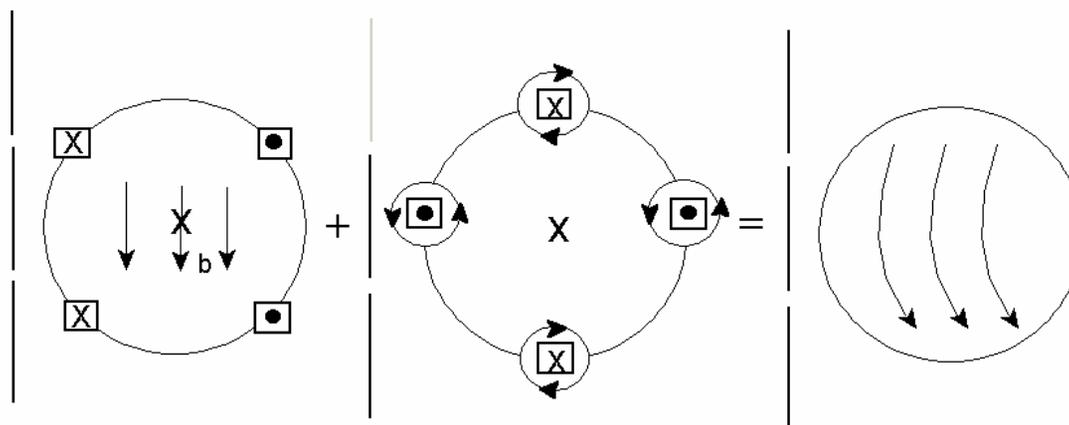


- $i_\varepsilon < 0$



- Triangolarità

- Il campo di quadrupolo provoca un incurvamento delle linee di campo
- Esempio con  $i_{\varepsilon} > 0$



“deformazione a fuso”, l’equilibrio è instabile

- Viceversa, se  $i_{\varepsilon} < 0$

“deformazione a botte”, l’equilibrio è stabile

- Def.: indice di decadimento del campo (adimensionale)

$$n = -\frac{R_0}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial R} = -\frac{R_0}{B_z} \frac{\partial B_R}{\partial z}$$

⌘ Spostamento rigido verticale  $\delta z$

⌘ Campo radiale  $\delta B_R$

⌘ Forza verticale  $\delta F_z \sim -2\pi R_0 I \delta B_r$

⌘ Equilibrio stabile se

$$\frac{\delta F_z}{\delta z} = -2\pi R_0 I \frac{\delta B_r}{\delta z} < 0$$

cioè se

$$\frac{\partial B_R}{\partial z} > 0$$

$$n < 0$$

**Condizione di stabilità verticale**

Se  $n > 0$  l'equilibrio è verticalmente instabile:

necessaria stabilizzazione a feedback