

# DINAMICHE COMPLESSE IN RETI NEURALI DI TIPO COOPERATIVO O COMPETITIVO

*Mauro Di Marco, Mauro Forti, Massimo Grazzini, Luca Pancioni*

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche  
Università degli Studi di Siena, Via Roma 56, 53100 Siena

***Parole chiave: Reti Neurali, Dinamiche Complesse, Transitori Lunghi***

L'attività di ricerca dell'unità di Siena è stata incentrata sull'analisi della dinamica non lineare di circuiti che modellano reti neurali di tipo cooperativo o competitivo e sulle loro applicazioni all'elaborazione in tempo reale di segnali.

*Reti cellulari neurali cooperative o competitive:* È noto che una rete neurale cellulare (CNN) con interconnessioni eccitatorie fra neuroni può essere modellata con un sistema dinamico di tipo cooperativo e, come conseguenza, genera un semiflusso di soluzioni monotone. Purtroppo, a causa dei tratti orizzontali delle attivazioni lineari a tratti, il flusso non risulta però fortemente monotono e quindi non sono applicabili i risultati classici di stabilità e convergenza di sistemi dinamici fortemente monotoni. È stata intrapresa un'indagine teorica di tipo sistematico sulla possibilità di estendere alcune tecniche di analisi, valide per flussi di tipo fortemente monotono, all'analisi di flussi monotoni, ma non fortemente monotoni, che descrivono la dinamica di CNN. Alcuni risultati, ottenuti in lavori recenti, riguardano la dimostrazione di una forma di dicotomia per gli insiemi omega-limite, e la convergenza per la soluzione generica, per una classe di CNN circolari definita da 'template' non-simmetrici e condizioni al contorno periodiche. Forme analoghe di dicotomia sono state dimostrate per reti neurali di Hopfield completamente interconnesse e con attivazioni lineari a tratti. È stato mostrato che si ha convergenza generica delle soluzioni verso punti di equilibrio asintoticamente stabili (multi-stabilità). Recentemente, alcune risultati sono stati ulteriormente estesi al caso importante di semiflussi monotoni nello spazio delle funzioni continue su un intervallo generati da ampie classi di reti neurali con attivazioni lineari a tratti e ritardi nelle interconnessioni (equazioni differenziali con ritardo). Una ulteriore estensione ha riguardato le reti neurali definite da sistemi lineari che evolvono in un ipercubo chiuso. Sotto opportune ipotesi, il flusso generato è SOP (strongly order preserving) e, come conseguenza, si ha convergenza generica delle soluzioni verso punti equilibrio asintoticamente stabili.

*Transitori lunghi in array circolari:* È stato mostrato teoricamente, e verificato sperimentalmente su prototipi di laboratorio, che in array CNN di tipo circolare e cooperativo si possono osservare, per ampi insiemi di parametri, e per ampi insiemi di condizioni iniziali, dei transitori oscillatori estremamente lunghi, la cui durata cresce esponenzialmente con la dimensione dell'array, prima che vi sia convergenza verso un punto di equilibrio. I transitori sono dovuti alla presenza di onde rotanti metastabili che sono fortemente attrattive lungo il manifold stabile e debolmente repulsive lungo il manifold instabile.

*CNN competitive che implementano funzioni non clonabili (physically unclonable functions):* È stato provato teoricamente e verificato sperimentalmente che è possibile utilizzare l'elevata variabilità della disposizione dei punti di equilibrio di reti CNN simmetriche (a fronte di piccole perturbazioni dei parametri di interconnessione) per realizzare funzioni fisicamente non clonabili (PUF), la cui uscita dipende dalle imprecisioni del processo implementativo, e quindi non riproducibili. Tali primitive hanno prestazioni migliori in termini di robustezza all'invecchiamento e alle perturbazioni ambientali e di processo rispetto ad altre soluzioni proposte in letteratura.

## Bibliografia

- [1] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, "Limit set dichotomy and convergence of semiflows defined by cooperative standard CNNs," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, n. 11, pp. 3549-3563, November 2010.
- [2] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, "Limit set dichotomy and convergence of cooperative piecewise linear neural networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. 57, no. 5, pp. 1052-1062, May 2011.
- [3] W. Allegretto, D. Papini, M. Forti, "Common asymptotic behavior of solutions and almost periodicity for discontinuous, delayed, and impulsive neural networks," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 21, pp. 1110-1125, July 2010.
- [4] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, "Limit set dichotomy and multistability for a class of cooperative neural networks with delays," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 23, no. 9, pp. 1473-1485, Sept. 2012.
- [5] T. Addabbo, A. Fort, M. Di Marco, L. Pancioni, V. Vignoli, "A 1-bit Physically Unclonable Function Based on a Two-Neurons CNN," *Proc. of 2013 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS2013, Beijing, China, 19-23 May, 2013*.
- [6] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, "Lojasiewicz inequality and exponential convergence of the Full-Range model of CNNs," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 40, n. 4, 409-419, April 2012.
- [7] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, and L. Pancioni, "Lyapunov Method and Convergence of the Full-Range Model of CNNs," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2008, vol. 55, n. 11, pp. 3528-3541, December 2008.
- [8] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, A. Premoli, "Comparison of convergence and stability properties for the state and output solutions of neural networks," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 39, n. 7, 751-774, July 2011.
- [9] M. Di Marco, M. Grazzini, L. Pancioni, "Global robust stability criteria for interval delayed full-range cellular neural networks," *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 22, no. 4, pp. 666-671, April 2011.
- [10] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, L. Pancioni, "Convergence of a class of cooperative standard cellular neural network arrays," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 59, n. 4, pp. 772-783, April 2012.
- [11] M. Di Marco, M. Forti, M. Grazzini, P. Nistri, L. Pancioni, "A study on semiflows generated by cooperative full-range CNNs," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 40, no.12, pp. 1191-1208, Dec. 2012.
- [12] Addabbo, T., Fort, A., Di Marco, M., Pancioni, L., Vignoli, V., "Physically unclonable functions derived from cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 60, pp. 3205-3214, 2013
- [13] Di Marco, M., Forti, M., Grazzini, M., Pancioni, L., "Convergent dynamics of nonreciprocal differential variational inequalities modeling neural networks," *IEEE Trans. Circuits and Systems I*, vol. 60, pp. 3227-3238, 2013.
- [14] Di Marco, M., Forti, M., Garay, B., Koller, M., Pancioni, L., "Multiple metastable rotating waves and long transients in cooperative CNN rings," *Proc. 2013 European Conference on Circuit Theory and Design, ECCTD 2013, 2013*.
- [15] M. Forti, B. Garay, M. Koller, L. Pancioni, "Long transient oscillations in a class of cooperative cellular neural networks," *Int. J. Circuit Theory Applicat*, in corso di stampa.
- [16] M. Forti, B. Garay, M. Koller, L. Pancioni, "An Experimental Study on Long Transient Oscillations in Cooperative CNN Rings," *Proc. CNNA 2013, Turin, Italy, 29-31 Aug. 2012*.
- [17] Di Marco, M., Forti, M., Grazzini, M., Pancioni, L., "Necessary and sufficient condition for multistability of neural networks evolving on a closed hypercube," *Neural Networks*, vol. 54, pp. 38-48, 2014.