

ANALISI DELL'INFLUENZA DEL RUMORE SULL'AMPIEZZA E LA FASE DI OSCILLATORI NON LINEARI

Michele Bonnin, Fernando Corinto e Marco Gilli

Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni
Politecnico di Torino

Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino

L'attività di ricerca dell'unità di Torino ha riguardato gli aspetti teorici e modellistici dell'influenza del rumore sul comportamento dinamico di oscillatori non lineari. I temi di ricerca principali hanno riguardato: 1) riduzione delle equazioni di stato dei circuiti ai corrispondenti modelli ampiezza—fase e equazione di fase ridotta; 2) metodi di analisi basati su equazioni differenziali stocastiche e analisi probabilistica basata sull'equazione di Fokker—Planck; 3) effetti del rumore sullo spettro degli oscillatori.

1) Riduzione delle equazioni di stato dei circuiti ai corrispondenti modelli ampiezza—fase e equazione di fase ridotta.

Il comportamento dinamico di circuiti e sistemi, lineari e non, viene comunemente descritto in termini di equazioni di stato. Tuttavia le tensioni e le correnti in un circuito non sempre rappresentano le variabili ottimali per caratterizzarne il comportamento spettrale. Da un punto di vista generale, la soluzione ottimale consiste nell'introdurre una nuova variabile, la fase dell'oscillatore, che rappresenta una nuova parametrizzazione della traiettoria periodica nello spazio degli stati. Insieme alla fase, vengono introdotte altre variabili che rappresentano "l'ampiezza" dell'oscillazione, di solito in termini di distanza rispetto alla soluzione periodica in assenza di perturbazioni. Il problema della riduzione al modello ampiezza—fase consiste nel ricavare, partendo dalle comuni equazioni di stato, delle equazioni differenziali che descrivano l'evoluzione delle variabili ampiezza e fase. Il problema può essere affrontato usando una decomposizione dello spazio degli stati basato sulla teoria di Floquet per le equazioni differenziali ordinarie. Questa tecnica richiede tuttavia la determinazione di opportune basi di autovettori, legati, in ultima istanza, alla soluzione dell'equazione variazionale, cioè un sistema di equazioni differenziali lineari, omogenee e a coefficienti periodici. L'attività svolta ha riguardato l'analisi dell'applicazione della teoria di Floquet agli oscillatori con rumore, che dal punto di vista matematico sono descritti da equazioni differenziali stocastiche, e la derivazione di formule analitiche per i vettori delle basi di Floquet, almeno nel caso di oscillatori del secondo ordine. Inoltre, sono state determinate le condizioni sotto le quali una semplice decomposizione basata su sistemi di vettori ortogonali fornisce risultati corretti. L'attività di ricerca su questo tema si è concretizzata nei lavori [1, 2].

2) Metodi di analisi basati su equazioni differenziali stocastiche e analisi probabilistiche basate su equazioni di Fokker—Planck

Il problema della riduzione del modello ampiezza—fase alla corrispondente equazione di fase ridotta richiede di proiettare la dinamica dell'oscillatore sull'intervallo $[0, 2\pi)$. Le metodologie di riduzione esistenti in letteratura sono essenzialmente basate sulla tecnica dell'eliminazione adiabatica. Le ricerche svolte dall'unità hanno dimostrato che, sebbene di semplice applicazione, nel caso di oscillatori soggetti a perturbazioni stocastiche queste metodologie comportano grossolane approssimazioni e possono condurre a risultati inconsistenti dal punto di vista fisico. Nei lavori [3, 4, 5], è stata proposta una nuova metodologia di riduzione basata sull'uso di operatori di proiezione in spazi funzionali e rigorosa dal punto di vista matematico. I lavori dimostrano che l'equazione ridotta descrive un processo non Markoviano, cioè il sistema mantiene una memoria delle variabili eliminate. Inoltre viene mostrato che l'effetto della correlazione tra l'ampiezza e il rumore produce uno scostamento della frequenza media di oscillazione rispetto alla frequenza naturale dell'oscillatore

imperturbato. I metodi di analisi tradizionali descrivono il rumore di fase come un processo puramente diffusivo, e non sono in grado di rendere conto dello scostamento della frequenza. L'analisi dell'equazione di Fokker—Planck associata all'equazione di fase ridotta derivata dall'unità, dimostra che la deriva della frequenza non può essere trascurata, in quanto ai fini della distribuzione di probabilità, è tanto rilevante quanto i termini diffusivi. L'attività di ricerca ha inoltre riguardato una comparazione sullo studio del rumore di fase condotto usando le più comuni interpretazioni delle equazioni differenziali stocastiche: Stratonovich e Itô. In particolare è stato dimostrato come la correlazione tra ampiezza e rumore, e la sua influenza sulla fase, possa essere convenientemente risolta impiegando il calcolo di Itô, e gli innegabili vantaggi che questo approccio comporti nonostante la sua apparente maggiore complessità [5].

3) Effetti del rumore sullo spettro degli oscillatori

In questa attività è stata analizzata una speciale classe di oscillatori, per i quali è stato possibile determinare analiticamente le isocrone, cioè varietà differenziabili che descrivono la fase degli oscillatori. Lo studio ha mostrato la relazione tra la forma delle isocrone, in particolare la loro curvatura, ed i coefficienti di deriva e diffusione dell'equazione di fase. Poiché le isocrone sono determinate per l'oscillatore imperturbato, questo permette di svelare il meccanismo di interazione tra la struttura dell'oscillatore ed il rumore, stabilendo come l'oscillatore reagirà all'azione di un segnale di natura stocastica. Per mezzo delle isocrone, è possibile disaccoppiare la dinamica dell'ampiezza da quella della fase. In questo modo è stato possibile determinare la distribuzione di probabilità stazionaria della fase, cioè la soluzione asintotica (per $t \rightarrow +\infty$) dell'equazione di Fokker—Planck. La distribuzione stazionaria fornisce molte informazioni utili, permettendo di calcolare analiticamente i valori attesi, la funzione di correlazione e di conseguenza la densità spettrale di potenza. Queste soluzioni analitiche sono state usate per valutare l'accuratezza delle approssimazioni comunemente usate nell'analisi di oscillatori più complessi. L'attività di ricerca ha prodotto i lavori [6, 7].

Bibliografia

- [1] M. Bonnin, F. Corinto and M. Gilli, “On the phase space decomposition for weakly connected oscillatory networks with 2nd order cells”, in *13th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications*, Turin, Italy, 2012.
- [2] M. Bonnin, F. Corinto, and M. Gilli, “Phase space decomposition for phase noise and synchronization analysis of planar nonlinear oscillators”, *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 59, n. 10, pp. 638-642, 2012.
- [3] M. Bonnin, F. Corinto and V. Lanza, “Phase model reduction for oscillatory networks subject to stochastic inputs”, in *13th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications*, Turin, Italy, 2012.
- [4] M. Bonnin, and F. Corinto, “Phase noise and noise induced frequency shift in stochastic nonlinear oscillators”, *IEEE transactions on Circuits and Systems I*, vol. 60, n. 8, pp. 2104-2115, 2013.
- [5] M. Bonnin, F. Corinto, and M. Gilli, “Phase noise, and phase models: Recent developments, new insights and open problems”, *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, vol. in stampa, 2014.
- [6] M. Bonnin, and F. Corinto, “Influence of noise on the phase and amplitude of second order oscillators”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol. 61, n. 3, pp. 158-162, 2014.
- [7] M. Bonnin, and F. Corinto, “Evaluating the influence of noise on the spectrum of an oscillator”, in *European Conference on Circuit Theory and Design*, Dresden, Germany, 2013.