# Lezione n. 2

*Introduzione all'analisi numerica*

*(metodi diretti ed iterativi per la soluzione di sistemi di equazioni lineari e non lineari)*

# Metodi diretti per la soluzione di sistemi lineari

- CRAMER
- ELIMINAZIONE DI GAUSS
- FATTORIZZAZIONE LU
- ALTRE FATTORIZZAZIONI (Cholesky, QR Orthogonal-triangular, SVD)
- GRADIENTE CONIUGATO per A simm. def. pos. (è anche diretto)

$$x_{k+1}=x_k+\alpha p_{k,}\ \alpha\colon r^T{}_{k+1}\, p_k= 0$$
$$p_k= r_k+ \beta p_{k-1},\ \beta\colon p^T{}_{k+1}\, Ap_k= 0 \text{ (anziché } \beta=0\text{)}$$

# Metodi iterativi per sistemi lineari

- METODI ITERATIVI
  - Definizione
  - Confronto con i metodi diretti
  - Proprietà richieste: consistenza, convergenza, velocità di convergenza

- METODI ITERATIVI APPLICATI A SISTEMI LINEARI (Ax=b)
  - Formule iterative con consistenza esclusiva: $x_{k+1}=x_k+M(Ax_k-b)$
  - Esempi di scelta di M: $M=-\sigma A^T$, $M=D^{-1}$ (Gauss-Jacobi), $M=(L_0+D)^{-1}$ (Gauss-Seidel)
  - Proprietà: consistenza, convergenza, velocità di convergenza
  - Criteri di arresto: $||r_k||/||b||<\varepsilon$, $||e_k||/||x||<\varepsilon$
  - Gradiente coniugato
  - Precondizionamento e metodo ICCG

# Metodi iterativi per sistemi non lineari

- Metodo di Newton-Raphson
  - $F(x_{k+1}) \approx F(x_k) + J(x_k)(x_{k+1}-x_k)=0,\ J=\partial F/\partial x \rightarrow x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)F(x_k)$
  - *consistenza esclusiva con J non singolare*
  - *(-) convergenza garantita solo in casi particolari di scarsa rilevanza pratica*
  - *(+) convergenza del secondo ordine in caso di successo:* $||e^{k+1}||/||e^k|| \rightarrow 0$
  - *(+) convergenza in una iterazione nel caso lineare*
  - *(-) calcolo ed inversione di J ad ogni iterazione*

- Iterazioni di punto fisso (Picard):
  - Esempio Quasi-Newton $x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_0)F(x_k)$
  - *Consistenza esclusiva*
  - *(+) convergenza garantita se* $T(x)= x - J^{-1}(x_0)F(x)$ *è una contrazione*
  - *(-) convergenza lineare → numero elevato di iterazioni*
  - *(+) calcolo ed inversione di J al primo passo → basso costo per iterazione*

# Esempio di applicazione di Newton e Picard

- Pot. di nodo per rete di bipoli: $Ag(A^T\varphi)=0$ da $Ai=0$, $v=A^T\varphi$, $i=g(v)$
- *Newton:* $\varphi_{k+1} = \varphi_k - [A(\partial g/\partial x)_k A^T]^{-1} Ag(A^T\varphi_k)$
- *Picard:* $\varphi_{k+1} = \varphi_k - (AG_0A^T)^{-1} Ag(A^T\varphi_k)$
- *Iterazione di punto fisso:*
  - $T(\varphi) = \varphi - (AG_0A^T)^{-1} Ag(A^T\varphi)$ *è una contr.se* $||\Delta T||/||\Delta\varphi||<L<1$
    - *Unicità :* $||\alpha-\beta||=||T(\alpha)-T(\beta)||<L||\alpha-\beta||$
    - *Convergenza:* $||\Delta\varphi_{k+1}||=||\Delta T_k||<L||\Delta\varphi_k|| \rightarrow ||\varphi_{k+n}-\varphi_k||<L^k||\varphi_0-T(\varphi_0)||/(1-L)$
    - *Vel. convergenza:* $||e_{k+1}||<L||e_k||$
    - *Stima dell'errore* $||e_k||=||\varphi_k-\alpha||<L^k||\varphi_0-T(\varphi_0)||/(1-L)$
- *T è una contrazione con caratteristiche monotone e* $G_0$ *opportuna*
  - $||x||=(x^TAG_0A^Tx)^{1/2}$, $||\Delta\varphi||=\Sigma_\kappa G_{0\kappa\kappa}\Delta v_\kappa^2$, $||\Delta T||=\Sigma_\kappa \omega_\kappa G_{0\kappa\kappa}\Delta v_\kappa^2$
  - $\omega_\kappa = 1 - 2 <di_\kappa/dv_\kappa>/G_{0\kappa\kappa} + (<di_\kappa/dv_\kappa>/G_{0\kappa\kappa})^2$
  - $G_{0\kappa\kappa} > [(di_\kappa/dv_\kappa)_{max}+(di_\kappa/dv_\kappa)_{min}]/2$ *garantisce* $L^2<1$
  - $||\Delta T||^2 = [\Delta\varphi-(AG_0A^T)^{-1}A\Delta g]^T AG_0A^T[\Delta\varphi-(AG_0A^T)^{-1}A\Delta g]=$
  - $\Delta\varphi^T AG_0A^T\Delta\varphi - 2\Delta\varphi^T A\Delta g + \Delta g^TA^T(AG_0A^T)^{-1}A\Delta g \le$
  - $\Delta v^TG_0\Delta v - 2\Delta v^T\Delta i + \Delta i^TG_0^{-1}\Delta i$

$$\Delta g^TA^T(AG_0A^T)^{-1}A\Delta g = \Delta g^TG_0^{-1/2}G_0^{1/2}A^T(AG_0A^T)^{-1}AG_0^{1/2}G_0^{-1/2}\Delta g = \Delta g^TG_0^{-1/2}MG_0^{-1/2}\Delta g \le \rho(M)^2\Delta g^TG_0^{-1}\Delta g$$

# Integrazione di equazioni differenziali ordinarie

- PROBLEMA DI CAUCHY
  - Esistenza ed unicità
  - Sistemi lineari tempoinvarianti

- INTEGRAZIONE NUMERICA CON METODI AD UN PASSO
  - Soluzione numerica con metodi a passo fisso
  - Metodi ad un passo: schema, errore locale, errore globale
  - Consistenza e convergenza
  - Zero-stabilità
  - Stabilità a passo fissato
  - Metodo-$\theta$: Eulero esplicito, Eulero implicito, Crank-Nicolson
  - Stima degli errori e scelta del passo
  - Metodi multi-step, predictor-corrector, Runge-Kutta

# PROBLEMA DI CAUCHY

We want to approximate the solution of the differential equation

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0, \qquad (1)$$

where $f$ is a function that maps $[t_0,\infty) \times \mathbf{R}^d$ to $\mathbf{R}^d$, and the initial condition $y_0 \in \mathbf{R}^d$ is a given vector.

The above formulation is called an *initial value problem* (IVP). The Picard-Lindelöf theorem states that there is a unique solution, if $f$ is Lipschitz continuous. In contrast, *boundary value problems* (BVPs) specify (components of) the solution $y$ at more than one points. Different methods need to be used to solve BVPs, for example the shooting method, multiple shooting or global methods like finite differences or collocation.

Note that we restrict ourselves to *first-order* differential equations (meaning that only the first derivative of $y$ appears in the equation, and no higher derivatives). However, a higher-order equation can easily be converted to a first-order equation by introducing extra variables. For example, the second-order equation $y''=-y$ can be rewritten as two first-order equations: $y'=z$ and $z'=-y$.

## LINEAR TIME INVARIANT CASE

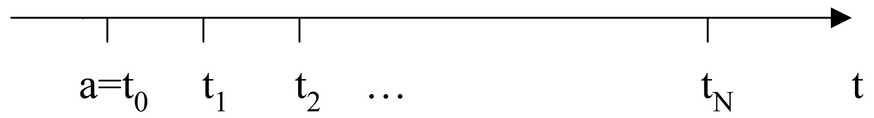
$dy/dt = Ax + Bu$ , $y(0)=y_0$, $\qquad y = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$, $\qquad e^{At} \approx I + At + (At)^2/2! + \ldots$

analytical solutions for various expressions – e.g., polynomial - of u in (0,t)

approximate solutions by dividing (0,t) in various intervals (the initial condition of k-th problem is the final value of the (k-1)-th solution at the final time: u can then be well approximated as a piecewise polynomial.

# INTEGRAZIONE NUMERICA CON METODI AD UN PASSO

*$dy/dt = f(t,y)$ in $(a,b)$ con $y(a)=y_a$*




*$(a,b)$ diviso in $N$ intervalli*

*$h=\Delta t=(b-a)/N$, $t_k=a+kh$*

*$y(t_k)$ valore esatto di $y$ all'istante $t_k$*

*$y_k$ valore numerico approssimato*

*$y^*_{k+1}$ = valore numerico ottenuto assumendo $y_j = y(t_j)$, $j<k+1$*

*$e_{k+1} = y_{k+1} - y(t_{k+1})$ errore globale*

*$\tau_{k+1} = y^*_{k+1} - y(t_{k+1})$ errore locale*

*formule a 1 passo:* $y_{k+1} = y_k + h\,\phi(h, t_k, y_k, y_{k+1}, f)$

*Eulero esplicito:* $\phi(h, t_k, y_k, y_{k+1}, f) = f(t_k, y_k)$

*Consistenza:* $\tau_{k+1}/h = O[h^p] \Rightarrow \phi(h, t_k, y_k, y_{k+1}, f) \rightarrow f(t_k, y_k)$ *per* $h \rightarrow 0$

*Convergenza:* $e_k \rightarrow 0$ *per* $h \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ *e* $k=\{1,2, \ldots, N\}$

# Stabilità

<u>*Zero-stabilità*</u>

$y_{k+1} = y_k + h\,[\phi(h, t_k, y_k, y_{k+1}, f) + \delta_{k+1}]\ ,\qquad y_0 = y(t_0) + \delta_0$

$y''_{k+1} = y''_k + h\,[\phi(h, t_k, y''_k, y''_{k+1}, f) + \delta''_{k+1}]\ ,\qquad y''_0 = y(t_0) + \delta''_0$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ C, h_0: h<h_0, \|\ \delta_{k+1} - \delta''_{k+1} \| < \varepsilon \Rightarrow \|\ y_{k+1} - y''_{k+1} \| < C\varepsilon$

*Metodi a 1 passo zero-stabili se* $\phi$ *verifica (Lipschitz):* $\|\Delta\phi\| < L_1\, \|\Delta y_k\| + L_2\, \|\Delta y_{k+1}\|$

Lax: consistenza + stabilità $\Leftrightarrow$ convergenza

<u>Stabilità a passo fissato</u>

$y_{k+1} = y_k + h\,[\phi(h, t_k, y_k, y_{k+1}, f) + \delta_{k+1}]\ ,\qquad y_0 = y(t_0) + \delta_0$

$y''_{k+1} = y''_k + h\,[\phi(h, t_k, y''_k, y''_{k+1}, f) + \delta''_{k+1}]\ ,\qquad y''_0 = y(t_0) + \delta''_0$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ C, \|\ \delta_{k+1} - \delta''_{k+1} \| < \varepsilon \Rightarrow \|\ y_{k+1} - y''_{k+1} \| < C\varepsilon\ ,\ h=h_0,$

criterio di stabilità: $\delta y_{k+1} \approx \delta y_k + h(\partial\phi/\partial y_{k+1})\,\delta y_{k+1} + h(\partial\phi/\partial y_k)\,\delta y_k$

$\rho[(I - h\partial\phi/\partial y_{k+1})^{-1}(I + h\partial\phi/\partial y_k)] < 1$

# Metodo-θ: Eulero esplicito, Eulero implicito, Crank-Nicolson

$$y(t_{k+1}) = y(t_k+\theta h)+y'(t_k+\theta h)(1-\theta)h + y''(t_k+\theta h)(1-\theta)^2h^2/2 + O[h^3] \qquad (+1)$$

$$y(t_k) = y(t_k+\theta h) - y'(t_k+\theta h)\theta h + y''(t_k+\theta h)\theta^2h^2/2 + O[h^3] \qquad (-1)$$

---

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = y'(t_k+\theta h)h + y''(t_k+\theta h)(1-2\theta)h^2/2 + O[h^3]$$

$$y'(t_{k+1}) = y'(t_k+\theta h)+y''(t_k+\theta h)(1-\theta)h + O[h^2] \qquad (\theta)$$

$$y'(t_k) = y'(t_k+\theta h) - y''(t_k+\theta h)\theta h + O[h^2] \qquad (1-\theta)$$

---

$$\theta y'(t_{k+1}) + (1-\theta)y'(t_k) = y'(t_k+\theta h) + O[h^2]$$

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = [\theta y'(t_{k+1})+(1-\theta)y'(t_k)]h + y''(t_k+\theta h)(1-2\theta)h^2/2 + O[h^3]$$

Metodo-θ: $y_{k+1} = y_k + h\,[\theta f(t_{k+1}, y_{k+1}) + (1-\theta) f(t_k, y_k)]$:

*$\theta = 0$ Eulero espl., $O[h]$, stab. cond.*

*$\theta = 1$ Eulero impl., $O[h]$, stab. incond.*

*$\theta = 1/2$ Crank-Nicolson, impl., $O[h^2]$, stab. incond.*

# Stima degli errori e scelta del passo

1. Il passo h deve garantire innanzitutto la stabilità

2. Per quanto concerne l'accuratezza (stima errore):

   *Valori noti nei punti nodali: interpolaz lineare nei nodi e valutaz. errore sull'equaz. (discontinuità di dy/dt)*

   *Utilizzo di metodi di diverso ordine (es. Eulero e CN, o RK 2^ e 3^ ord.)*

   *Riduzione del passo*

# Metodo di Runge-Kutta

$$y_{k+1}=y_k+h\Sigma_i b_i K_i, \quad K_i=\Sigma_j f(t_k+c_j h,\ y_k+h\Sigma_j a_{ij}K_j)$$

<u>*II ordine esplicito:*</u>

$$(y_{k+1}-y_k)/h=b_1K_1+b_2K_2$$

$$K_1={}_jf(t_k+c_1h,\ y_k)$$

$$K_2={}_jf(t_k+c_2h,\ y_k+ha_{21}K_1)$$

$$(y_{k+1}-y_k)/h=y'(t_k)+y''(t_k)\ h/2+O[h^3]$$

*Uguagliando gli sviluppi in serie di Taylor, dove $y'=f$ e $y''=f_t+ff_y$:*

$$(y_{k+1}-y_k)/h=f[t_k+h/2,\ y_k+h\,f(t_k,y_k)/2]$$

<u>*IV ordine esplicito:*</u>

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}\left[k_1+2k_2+2k_3+k_4\right]$$

where

$$k_1=f\left(t_n,y_n\right)$$

$$k_2=f\left(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3=f\left(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4=f\left(t_n+h,y_n+hk_3\right)$$

# Predictor-Corrector, multistep

1. Predictor-corrector:
   - P (espl.) $y^{\wedge}_{k+1} = y_k + h\, \phi_P(h, t_k, y_k, f)$ *(es. Eulero espl.)*
   - C (impl.) $y_{k+1} = y_k + h\, \phi_C(h, t_k, y_k, y^{\wedge}_{k+1}, f)$ *(es. Crank-Nicolson)*
   - *Stabilità condizionata*
   - *Ordine* $r = \min(r_P + 1, r_C)$

2. Multistep
   - *Inquadrabile con qualche accorgimento nella teoria dei single-step*
   - *Non necessariamente zero-stabili*
   - *Problemi di interpolazione e cond. iniz. cambiando passo*