Lezione n. 3

Metodo delle differenze finite

(classificazione delle equazioni e consistenza, stabilità e convergenza nel caso parabolico)

Principali metodi numerici per l'analisi elettromagnetica

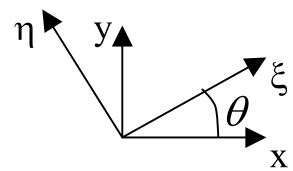
- *differenze finite*
- *elementi finiti*
- *metodi integrali (di volume ed al contorno)*
- ...

Caratteristiche e classificazione PDE (1)

- Eq. 2D $\alpha\varphi_{xx}+\beta\varphi_{xy}+\gamma\varphi_{yy}+\delta=0$ con α, β, γ e δ funzioni di $x, y, \varphi_x, \varphi_y$
- Problema di Cauchy nel 2D: φ e φ_n assegnati su curva aperta Γ
- Cambio variabili: $\xi= cx+sy+\xi_0 \quad c=\cos\theta, s=\sin\theta$

$$\eta=-sx+cy+\eta_0 \quad \varphi_x=\varphi_\xi c-\varphi_\eta s,\ \varphi_y=\varphi_\xi s+\varphi_\eta c$$

$$\varphi_{xx}=\varphi_{\xi\xi}c^2-2\varphi_{\xi\eta}cs+\varphi_{\eta\eta}s^2$$
$$\varphi_{xy}=\varphi_{\xi\xi}cs+\varphi_{\xi\eta}(c^2-s^2)-\varphi_{\eta\eta}cs$$
$$\varphi_{yy}=\varphi_{\xi\xi}s^2+2\varphi_{\xi\eta}(c^2-s^2)+\varphi_{\eta\eta}c^2$$



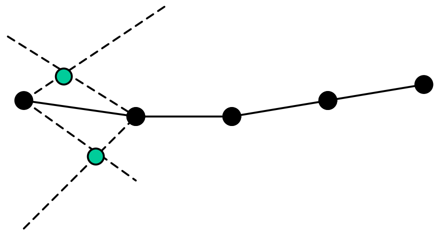
- Nel nuovo riferimento: $\alpha^*\varphi_{\xi\xi}+\beta^*\varphi_{\xi\eta}+\gamma^*\varphi_{\eta\eta}+\delta^*=0,$
- *Se* $\gamma^*=\alpha s^2-\beta cs+\gamma c^2=0$, φ e φ_n $(=\varphi_\eta)$ *non possono essere assegnati ad arbitrio, altrimenti* $\varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta, \varphi_{\xi\xi}, \varphi_{\xi\eta}$ *non verificano l'equazione*
- Caratteristiche = direzioni su cui non possiamo assegnare cond. Cauchy

Caratteristiche e classificazione PDE (2)

- discriminante $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$:
  - $\Delta>0$ 2 caratteristiche eq. iperbolica
  - $\Delta=0$ 1 caratteristica (2 coinc.) eq. parabolica
  - $\Delta<0$ 0 caratteristiche eq. ellittica

- Sulle caratteristiche: $\alpha^*(\varphi_\xi)_\xi+\beta^*(\varphi_\eta)_\xi+\delta^*=0$ *(ODE)*

- *Metodo delle caratteristiche per eq. iperboliche:*
  - *coordinate fornite dall'incrocio delle caratt.di 2 famiglie*
  - *$\nabla\varphi$ fornito da un sistema di 2 equaz. in 2 incognite*
  - *φ determinata dal valor medio di $\nabla\varphi$ nel triangolo e da φ nota negli altri due vertici*



Metodi alle differenze finite per equazioni paraboliche (1)

- $\kappa\varphi_{xx}+q-\varphi_y=0 \Rightarrow \quad \alpha=\kappa,\ \beta=\gamma=0,\ \delta=q-\varphi_y,\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=0$
- diffusione del campo magnetico in una lastra piana:

  $\partial(\sigma^{-1}\,\partial \mathrm{H}/\partial x)/\partial x=\mu\,\partial \mathrm{H}/\partial t \quad in\ (a,b)\times(t_0,t_{max})$
- condizioni iniziali ed al contorno (effetti dell'eliminazione di $\partial\mathbf{D}/\partial t$):

$$\int_{t_0}^{t}\int_a^b u\,\partial(\sigma^{-1}\partial u/\partial x)/\partial x\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t}\int_a^b u\,\mu\,\partial u/\partial t\,dx\,dt,\quad u=H'-H''$$

$$\int_a^b \mu\,u^2/2\,dx=\int_a^b \mu\,u^2(t_0)/2\,dx-\int_{t_0}^{t}\int_a^b \sigma^{-1}(\partial u/\partial x)^2\,dx\,dt+\int_{t_0}^{t}[u\,\sigma^{-1}\partial u/\partial x]_a^b\,dt$$

es. $H(x,t_0)$, $H(a,t)$ *ed* $H(b,t)$ *(senza* $\partial \mathrm{H}/\partial t$ *all'istante* t_0*)*

Metodi alle differenze finite per equazioni paraboliche (2)

Schema esplicito con σ uniforme ($H_{xx}=\mu\sigma H_t$), griglia uniforme

$$H(x_i,t_{k+1}) = H(x_i,t_k) + H_t(x_i,t_k)\Delta t + O[\Delta t^2] \rightarrow \text{espr. per } H(x_i,t_k)$$

$$H(x_{i+1},t_k) = H(x_i,t_k) + H_x(x_i,t_k)\Delta x + H_{xx}(x_i,t_k)\Delta x^2/2 + H_{xxx}(x_i,t_k)\Delta x^3/3! + O[\Delta x^4]$$

$$H(x_{i-1},t_k) = H(x_i,t_k) - H_x(x_i,t_k)\Delta x + H_{xx}(x_i,t_k)\Delta x^2/2 - H_{xxx}(x_i,t_k)\Delta x^3/3! + O[\Delta x^4]$$

$$H(x_{i+1},t_k) + H(x_{i-1},t_k) = 2H(x_i,t_k) + H_{xx}(x_i,t_k)\Delta x^2 + O[\Delta x^4] \rightarrow \text{espr. per } H_{xx}(x_i,t_k)$$

$$\frac{H_{i-1,k} - 2H_{i,k} + H_{i+1,k}}{\Delta x^2} = \mu\sigma \frac{H_{i,k+1} - H_{i,k}}{\Delta t}$$

Consistenza dello schema esplicito (errore = $O[\Delta t] + O[\Delta x^2]$)

Metodo-θ: $$\theta \frac{H_{i-1,k+1} - 2H_{i,k+1} + H_{i+1,k+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)\frac{H_{i-1,k} - 2H_{i,k} + H_{i+1,k}}{\Delta x^2} = \mu\sigma \frac{H_{i,k+1} - H_{i,k}}{\Delta t}$$

Consistenza del metodo-θ: errore = $(1-2\theta)O[\Delta t] + O[\Delta t^2] + O[\Delta x^2]$

Metodi alle differenze finite per equazioni paraboliche (3)

- *Schema esplicito non convergente se $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$ con $\Delta x/\Delta t$=costante*

- *Stabilità schema esplicito:* $\underline{H}_{k+1}=\underline{H}_k+\alpha M\,\underline{H}_k=(I+\alpha M)\,\underline{H}_k$

$$M=\begin{bmatrix} & & & \cdots & & & \\ \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \cdots & & & \end{bmatrix}, \quad \alpha=\Delta t/\mu\sigma\Delta x^2$$

cerchi di Gerschgorin di $I+\alpha M$ con centro in $1-2\alpha$ e raggio 2α:
autovalori della matrice di aggiornamento $(I+\alpha M)$: $1-4\alpha<\lambda<1$
$\Rightarrow \rho(I+\alpha M)<1$ *per* $1-4\alpha>-1$, *cioè* $\boldsymbol{\Delta t/\mu\sigma\Delta x^2<1/2}$

- *Altri metodi di analisi di stabilità:*
  - *von Neumann: costanti di tempo autofunzioni sviluppo di Fourier in x*
  - *energia numerica: analogo discreto dell'eq. di Poynting su H'-H''*

- *Stabilità metodo $-\theta$: come per ODE (stabilità incondizionata per $\theta \geq 1/2$*

Metodi alle differenze finite per equazioni paraboliche ed ellittiche 2D e 3D

- Esempio: calcolo della capacità di un condensatore piano

- Problemi del metodo delle differenze finite:
  - Operatori generici
  - Domini non limitati
  - Condizioni al contorno di Neumann
  - Superfici di discontinuità
  - Sorgenti concentrate