Lezione n. 4

*Formulazioni in termini di campo e di potenziale
(campi elettromagnetici stazionari e lentamente variabili)*

Analisi di un problema reale

- Modello fenomenologico
- Formulazione matematica
- Formulazione numerica
- Soluzione numerica
- Verifica

Problema elettromagnetico

Equazioni di campo in V :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Relazioni costitutive in V :

$$\mathbf{B} = \mathcal{B}(\mathbf{H})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{D}(\mathbf{E})$$

$$\text{ad es. : } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s$$

$$\mathbf{J} = \mathcal{J}(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

Condizioni iniziali per $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ in V (tali che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$)

Cond. al contorno per $\mathbf{H}$ od $\mathbf{E}$ su ∂V (o di regolarità all' ∞), ad es. $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{e}$

Opportune condiz. sulle superfici di discontinuità materiali

Unicità della soluzione

La differenza di due possibili diverse soluzioni verifica (Poynting):

$$\Delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{D}}{\partial t} + \Delta \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\Delta \mathbf{E} \times \Delta \mathbf{H}) + \Delta \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{J} = 0$$

quindi nel caso lineare:

$$\int_V \left(\frac{(\Delta \mathbf{D})^2}{2\varepsilon} + \frac{(\Delta \mathbf{B})^2}{2\mu} \right) dV = \left[\int_V \left(\frac{(\Delta \mathbf{D})^2}{2\varepsilon} + \frac{(\Delta \mathbf{B})^2}{2\mu} \right) dV \right]_{t=0} +$$
$$- \int_{t_0}^t \int_{\partial V} [\Delta \mathbf{H} \cdot (\mathbf{n} \times \Delta \mathbf{E})] dS dt - \int_{t_0}^t \int_V [\sigma (\Delta \mathbf{E})^2] dV dt$$

- 2° membro nullo o negativo per le cond. iniziali e al contorno considerate
- analoghe considerazioni per caratteristiche non lineari monotone

Campi stazionari

- $\partial/\partial t=0 \Rightarrow$
 - $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$
 - $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$
- Casi particolari (in funzione delle sorgenti e delle grandezze di interesse):
 - Magnetostatica
 - Corrente stazionaria
 - Elettrostatica

Magnetostatica

- Equazioni di campo: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \quad \text{in } V$
 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{in } V$
- Relazione costitutiva: $\mathbf{B} = \mathcal{B}(\mathbf{H}), \quad \text{in } V$
- Condizioni al contorno $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = b \text{ on } \partial V_b \subseteq \partial V$
 $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ on } \partial V_h = \partial V - \partial V_b.$

Corrente stazionaria

- Equazioni di campo: $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{in } V$
 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \text{in } V$
- Relazione costitutiva: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_s, \quad \text{in } V$

- Condizioni al contorno

and suitable boundary conditions like $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = j$ on $\partial V_j \subseteq \partial V$ and $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{e}$ on $\partial V_e = \partial V - \partial V_j$, along with additional integral constraints on currents or voltages if ∂V_e is not a connected surface (i.e., a surface consisting of two or more disconnected pieces).

Elettrostatica

- Equazioni di campo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{in } V$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{st}}, \quad \text{in } V$$

- Relazione costitutiva:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{in } V$$

- Condizioni al contorno

and suitable boundary conditions like $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = d$ on $\partial V_d \subseteq \partial V$ and $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{e}$ on $\partial V_e = \partial V - \partial V_d$, along with additional integral constraints if ∂V_e is not a connected surface.

Campi quasi stazionari: correnti indotte

MODELLO DELLE CORRENTI INDOTTE

($\partial \mathbf{D} / \partial t$ trascurabile nella legge di Ampere) sotto le ipotesi:

- $\tau \gg \epsilon / \sigma$
- $W_m \gg W_e$
- $L / \tau \ll \sqrt{1 / \epsilon \mu}$

Equazioni di campo

$$\begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, & \text{in } V_c \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{in } V_c \end{array} \quad \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{s1}, & \text{in } V-V_c \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{in } V-V_c \end{array}$$

Relazioni costitutive

$$\begin{array}{ll} \mathbf{B} = \mathcal{B}(\mathbf{H}), & \text{in } V \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{s1}, & \text{in } V_c \end{array}$$

Correnti indotte: condizioni ai limiti

– *Problema parabolico in V_c , ellittico in $V-V_c$*

– *Condizioni al contorno:*

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{e}, \quad \text{on } \partial V_c \subseteq \partial V$$
$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{on } \partial V_b \subseteq \partial V$$

(o di regolarità all'infinito se V non è limitato)

– *Condizioni iniziali solo su $\mathbf{B}$, ma in genere è assegnata $\mathbf{J}$ all'istante iniziale e $\mathbf{B}$ è calcolato risolvendo un problema magnetostatico*

– *Condizioni di interfaccia sulle superfici di discontinuità (anche fra V_c e $V-V_c$):*

$$[\mathbf{H}] \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{on } \Sigma_d$$

$$[\mathbf{E}] \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{on } \Sigma_d$$

Considerazioni sul quasi stazionario magnetico

- *Calcolo del campo elettrico in $V-V_c$ non richiesto*
- *Carica non conservata*
- *Problema iperbolico in V diventato parabolico in V_c ed ellittico in $V-V_c$*
- *Condizioni iniziali e al contorno modificate (solo su $\mathbf{B}$, anziché su $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$)*
- *Problema duale quasi stazionario elettrico dove si trascura $\partial\mathbf{B}/\partial t$ nella legge di Faraday (N.B.: $\mathbf{E}$ diventa irrotazionale)*

Classificazione delle formulazioni

In base al carattere degli operatori nel dominio V :

- *Differenziali:*
 - *Discretizzazione anche dei domini omogenei (compresi aria e vuoto)*
 - *Problemi nel trattamento di domini non limitati*
 - *Campi generalmente continui e solenoidali solo in forma debole*
 - *Matrici sparse e calcolate rapidamente*
 - *Trattamento automatico di mezzi non lineari, disomogenei ed anisotropi*
- *Integrali:*
 - *Limitato costo di discretizzazione*
 - *Condizioni di regolarità all'infinito tenute automaticamente in conto*
 - *Campi magnetici in genere continui e solenoidali*
 - *Matrici piene calcolate tramite integrali doppi di volume*
 - *Problemi nel trattamento di mezzi non lineari, disomogenei ed anisotropi*

In base alla variabile primaria:

- *Formulazioni magnetiche:*
 - *In termini di $\mathbf{H}$ o $\mathbf{T}$ (potenziale vettore elettrico), es.*
- *Formulazioni elettriche:*
 - *In termini di $\mathbf{E}$ o $\mathbf{A}$ (potenziale vettore magnetico)*

$$\begin{aligned}\nabla \times \sigma^{-1} \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \times \sigma^{-1} \mathbf{J}_s - \frac{\partial \mathcal{B}(\mathbf{H})}{\partial t}, & \text{in } V_c \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_s, & \text{in } V - V_c \\ \nabla \cdot \mathcal{B}(\mathbf{H}) &= 0, & \text{in } V - V_c\end{aligned}$$

Trattamento delle superfici di discontinuità

- *La formulazione in $\mathbf{H}$ tiene automaticamente in conto le discontinuità elettriche, ma non quelle magnetiche*
- *Trattamento delle discontinuità:*
 - *Funzioni di base discontinue: elementi non conformi (parzialmente conformi)*
 - *Potenziali vettori e scalari:*

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$$

$$\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \Omega$$

*equazioni di Maxwell quasi stazionarie automaticamente soddisfatte
potenziali continui anche sulle superfici di discontinuità*

4 variabili scalari anziché 3

non unicità dei potenziali $\Rightarrow$ gauges

Gauges

- *Gauge di Coulomb (utile per formulazioni integrali)*
- *Gauge di Lorenz (utile in alta frequenza)*
- *Potenziali vettori a 2 componenti (decomposizione albero-coalbero)*