Il Metodo degli Elementi Finiti

Applicazione al problema elettrostatico

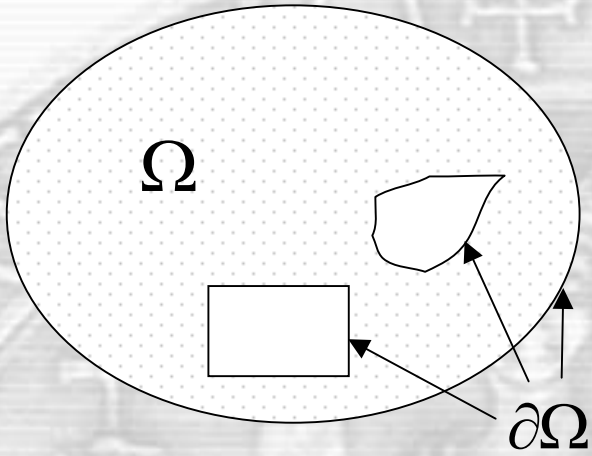
Raffaele ALBANESE

Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

April 2002

A Learning Object produced for the EU IST GUARDIANS Project

Residui pesati



Equazione differenziale ellittica:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \varepsilon \nabla \varphi = \rho \quad in\ \Omega \qquad (1) \\ + \\ condizioni\ \ al\ \ contorno\ \ su\ \partial\Omega \end{cases}$$

Moltiplichiamo l'equazione (1) per un'arbitraria funzione test *w* and integriamo su Ω:

$$-\int_\Omega w \nabla \cdot \varepsilon \nabla \varphi \, d\Omega = \int_\Omega w \rho \, d\Omega \qquad (2)$$

Integriamo per parti, ottenendo la forma debole di (1):

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \varepsilon \nabla \varphi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} w \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma = \int_\Omega w \rho \, d\Omega \qquad (3)$$

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Funzioni test e forma debole

- Nella forma forte

$$-\int_\Omega w\nabla\cdot\varepsilon\nabla\varphi\, d\Omega = \int_\Omega w\rho\, d\Omega \quad \forall w \quad \Leftrightarrow \quad -\nabla\cdot\varepsilon\nabla\varphi = \rho \;\; in\;\Omega$$

  φ è continua e derivabile due volte, mentre non ci sono vincoli per la funzione test w

- Nella forma debole

$$\int_\Omega \nabla w\cdot\varepsilon\nabla\varphi\, d\Omega - \int_{\partial\Omega} w\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\Sigma = \int_\Omega w\rho\, d\Omega \quad \forall w$$

  sia φ sia w devono essere continue e derivabili a tratti, cioè sono introdotti dei vincoli per w mentre i requisiti per φ sono allentati rispetto al problema originale

- La forma debole tiene automaticamente in conto le condizioni di interfaccia sulle superfici di discontinuità (continuità della componente normale di $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$)

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Interpolazione: funzioni di base

- Espandiamo φ con N funzioni di base:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{N} \phi_k u_k(\boldsymbol{x}), \qquad u_k \in L^2{}_{grad}(\Omega)$$

- Approssimazione con elementi finiti triangolari:

Discretizzazione di $\Omega \cong \bigcup_{j=1}^{Ne} \Omega_j$

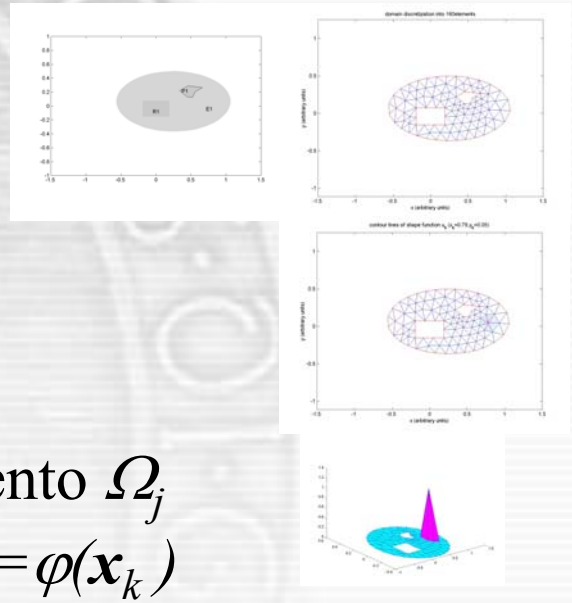
u_k funzione continua lineare a tratti

$u_k = 1$ sul nodo k, dove $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_k$

$u_k = 0$ sugli altri nodi

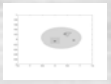
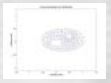
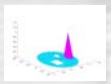
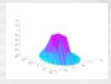
u_k interpolata linearmente su ogni elemento Ω_j

ϕ_k è quindi il valore di φ sul nodo k: $\phi_k = \varphi(\boldsymbol{x}_k)$



Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

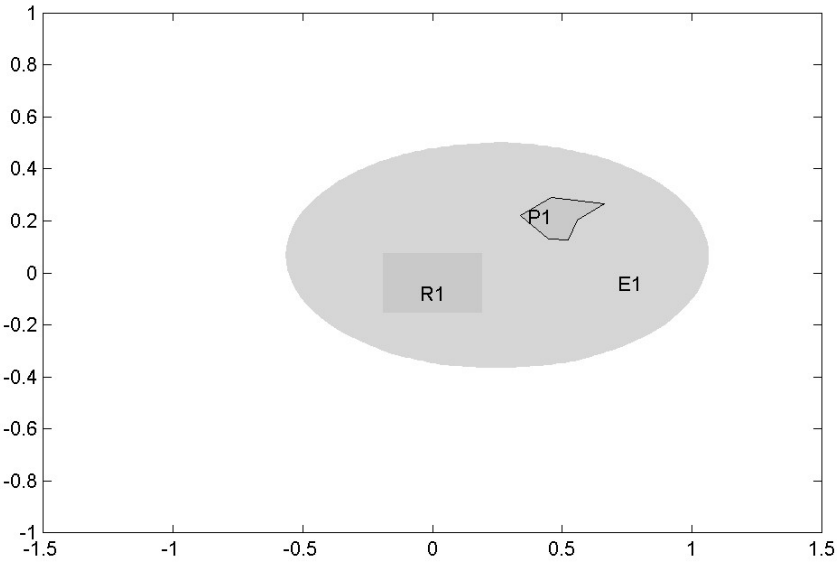
Funzioni di forma

- $L^2_{grad}(\Omega)$ è lo spazio dei campi scalari continui e derivabili a tratti in Ω con il gradiente a quadrato integrabile
- u_k e φ sono continue, ∇u_k e $\nabla\varphi$ sono continue a tratti (costanti a tratti con triangoli del 1^ ordine)
- Approssimazione agli elementi finiti:
  -  Bisogna fornire una descrizione geometrica del dominio
  -  Poi il dominio è approssimato da un insieme di elementi finiti
  -  Si associa una funzione di forma a ciascun nodo
  -  A patto di avere una griglia sufficientemente fitta, la soluzione φ ed il suo gradiente $\nabla\varphi$ possono essere approssimati da un'opportuna combinazione lineare di funzioni di forma

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Approssimazione agli elementi finiti (1)

- Bisogna fornire una descrizione geometrica del dominio

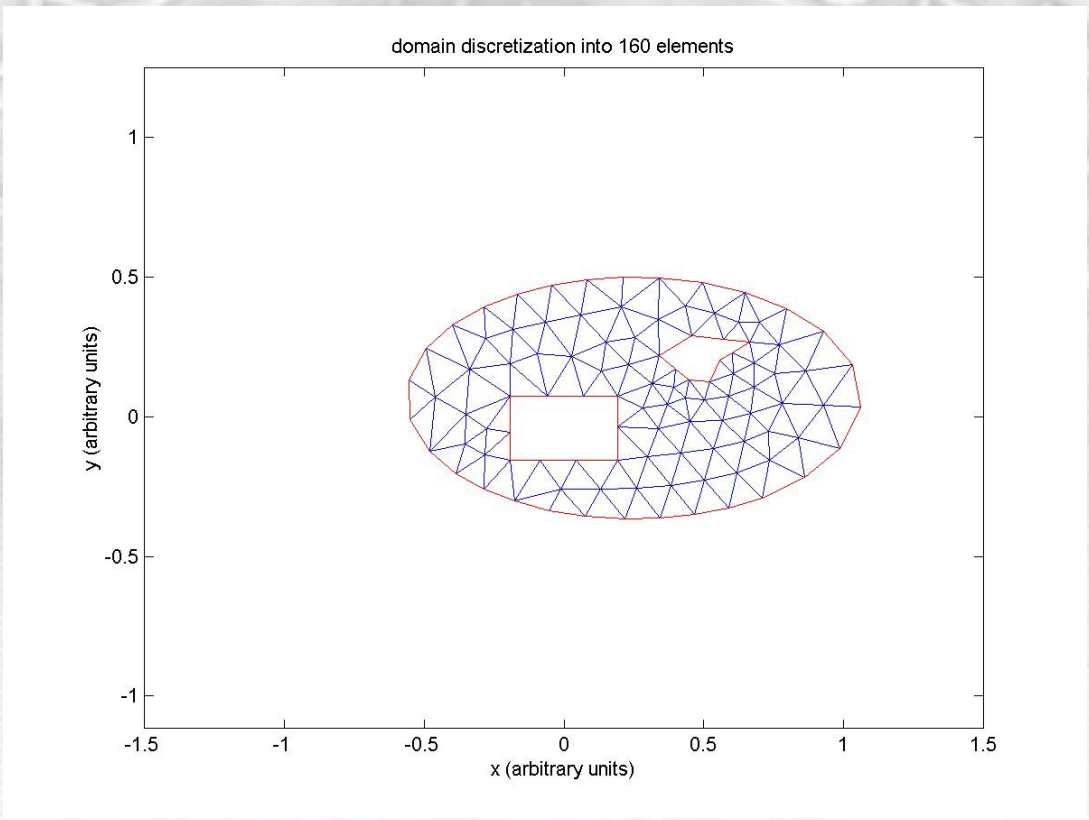


Questo è un esempio 2D prodotto dal menù "Draw" della GUI (Graphical User Interface) del PDE toolbox of Matlab® avviato con il comando "pdetool" (il dominio di interesse è identificato dalla formula"E1-P1-R1", cioè l'insieme differenza tra l'ellisse "E1",il poligono "P1" ed il rettangolo "R1")

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Approssimazione agli elementi finiti (2)

- Poi il dominio è approssimato da un insieme di elementi finiti

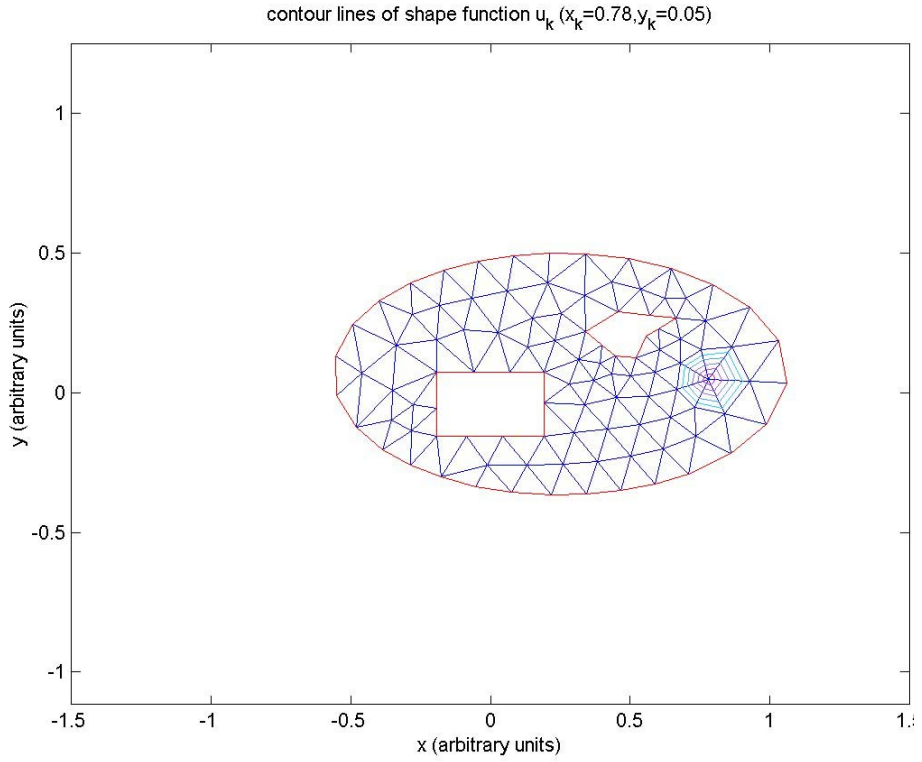


Questa è una griglia ad elementi triangolari relativa al precedente dominio, ottenuta dal menù "Mesh"della GUI (Graphical User Interface) del PDE toolbox of Matlab® con il comando "initmesh": la griglia (" mesh") consiste di 160 elementi, 103 nodi e 48 lati di contorno

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

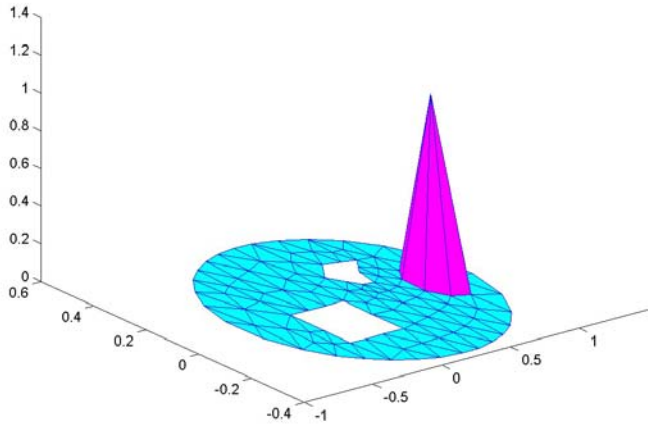
Approssimazione agli elementi finiti (3)

- Si associa una funzione di forma a ciascun nodo



Queste sono le linee di livello della funzione di forma associata ad un nodo.

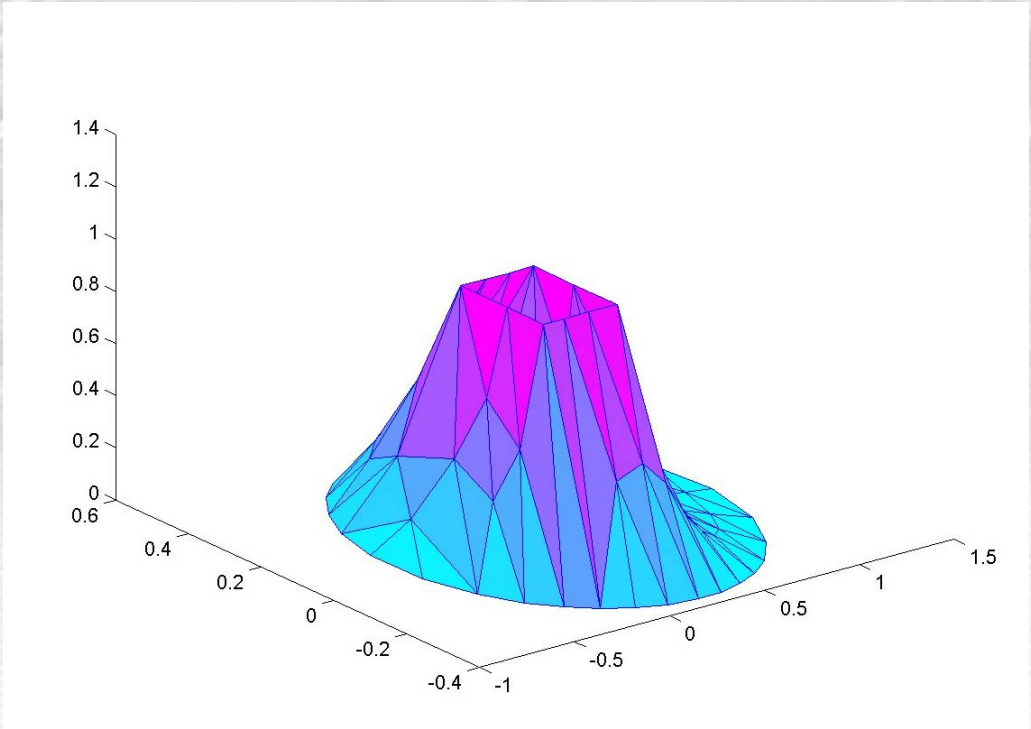
Sotto è una rappresentazione alternativa di u_k come la superficie $z=u_k(x,y)$



Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Approssimazione agli elementi finiti (4)

- A A patto di avere una griglia sufficientemente fitta, la soluzione φ ed il suo gradiente $\nabla\varphi$ possono essere approssimati da un'opportuna combinazione lineare di funzioni di forma



Questa è la rappresentazione della superficie:

$z=\varphi(x,y)=\Sigma_k \phi_k u_k (x,y)$

I coefficienti ϕ_k sono stati ottenuti risolvendo l'equazione di Laplace con condizioni al contorno di Dirichlet.

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Formulazione di Galerkin

Applichiamo la forma debole con N indipendenti funzioni test $w_i(\boldsymbol{x}), i = 1,\ldots,N$ ottenendo il sistema lineare:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\phi} = \underline{b}, \begin{cases} A_{ik} = \int_\Omega \nabla w_i \cdot \varepsilon \nabla u_k \, d\Omega \\ b_i = \int_\Omega w_i \rho \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} w_i \varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega \end{cases}$$

Abbiamo la procedura di Galerkin assumendo le funzioni test uguali alle funzioni di base: $w_i(\boldsymbol{x}) = u_i(\boldsymbol{x}), i = 1,\ldots,N$

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Costruzione della matrice

- Matrice formata sommando i contributi di ogni elemento:

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Omega_j} \nabla u_i \cdot \varepsilon \nabla u_k \, d\Omega$$

- Ogni elemento fornisce un numero limitato di contributi non nulli (relativi ai propri nodi)

- Integrazione su Ω_j effettuata numericamente usando formule di quadratura di Gauss

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Proprietà della matrice

La matrice $\underline{\underline{A}}$ è:

- ***simmetrica***: $A_{ik}=A_{ki}$ con la formulazione di Galerkin
- ***sparsa***: $A_{ik}\neq 0$ solo se i nodi i-k sono connessi da un lato
- ***semidefinita positiva***:

$$\underline{\phi}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\phi} = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \varepsilon \nabla\varphi \, d\Omega = 2W_m \geq 0$$

- ***singolare:***

$$\sum_{k=1}^{N} A_{ik} = \int_\Omega \nabla u_i \cdot \varepsilon \nabla \left(\sum_{k=1}^{N} u_k\right) d\Omega = \int_\Omega \nabla u_i \cdot \varepsilon \nabla 1 \, d\Omega = 0$$

- ***con dominanza diagonale debole*** *(in assenza di triangoli ottusi)*:

$$A_{ik} \leq 0 \text{ for } i \neq k,\ A_{ii} = \sum_{k=1, k\neq i}^{N} \left|A_{ik}\right| > 0$$

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Termine noto con condizioni al contorno naturali

- Per condizioni al contorno omogenee di tipo Neumann ($\varepsilon\partial\varphi/\partial n=0$) il termine noto si forma sommando i contributi dei singoli elementi:

$$b_i = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Omega_j} u_i \rho \, d\Omega$$

- Essendo la matrice singolare, si deve assumere un riferimento per il potenziale ad un nodo in ogni parte connessa di Ω (ad es., eliminando un'equazione ed un'incognita come per il metodo dei potenziali di nodo applicato alle reti elettriche)

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Altre condizioni al contorno

- Per applicare condizioni di Neumann non omogenee ($\varepsilon\partial\varphi/\partial n = g$ *on* $\partial\Omega_N \subseteq \partial\Omega$) si aggiungono i contributi di $\partial\Omega_N$ al termine noto :

$$b_i = \int_\Omega u_i \rho \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} u_i g \, d\Sigma$$

- Per applicare condizioni di Dirichlet ($\varphi = f$ *on* $\partial\Omega_D \subseteq \partial\Omega$) si impone $\phi_k = f(\mathbf{x}_k)$ in luogo della k-ma equazione fornita dai residui pesati.

- Per applicare condizioni al contorno di tipo misto ($\alpha\varphi + \beta\ \varepsilon\partial\varphi/\partial n = \gamma$ *on* $\partial\Omega_M \subseteq \partial\Omega$) vanno modificati sia la matrice sia il termine noto

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Soluzione del sistema

- Tecniche standard nei casi lineari, ad es.:
  - eliminazione di Gauss
  - gradiente coniugato precondizionato

- Metodi iterativi nei casi non lineari, ad es.:
  - metodo di Newton
  - iterazioni di Picard (di punto fisso)

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Uscite e visualizzazione

- Grandezze in uscita:
  - *Grandezze locali* (potenziale scalare, campo elettrico, spostamento elettrico) in qualsiasi punto del dominio
  - *Grandezze globali*, ad es. energia totale, forze, flussi; nel caso lineare l'energia totale è

$$W_m = \tfrac{1}{2}\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \varepsilon \nabla\varphi \, d\Omega = \tfrac{1}{2}\,\underline{\phi}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\phi}$$

- Visualizzazione dei risultati:
  - *Linee o superfici equipotenziali*
  - *Linee di forza*
  - *Campi vettoriali rappresentati da frecce*

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria

Ulteriori aspetti

- Stima dell'errore, qualità della griglia ed infittimento della griglia
- Campi 3D
- Problemi nel dominio del tempo
- Problemi agli autovalori
- Trattamento di domini non limitati
- …

Author: Prof. Raffaele ALBANESE
Univ. Mediterranea di Reggio Calabria