Lezione n. 6

Introduzione al metodo degli elementi finiti: formulazioni variazionali

Formulazione di un problema differenziale da risolvere con il metodo degli elementi finiti (1)

- *Definizione del problema:*
  $T\varphi = f$ in Ω, con $B\varphi = g$ su $\partial\Omega$
- *Espansione di φ :*
  $\varphi(x) = \Sigma_\kappa \phi_\kappa u_\kappa(x)$
  N funzioni di base $u_\kappa(x)$, N gradi di libertà ϕ_κ
- *Collocazione:*
  $T\varphi = f$ *verificata in N punti di* Ω
  problemi: scelta punti, convergenza non garantita

Formulazione di un problema differenziale da risolvere con il metodo degli elementi finiti (2)

- *Op. differenz. del II ordine:* $$T\varphi = \sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_k b_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + c\varphi$$
- *Op. aggiunto:* $<\varphi, T\psi> = <\psi, T^*\varphi>$ *con* $<\psi,\varphi> = \int_\Omega \psi\varphi \, d\Omega$
$$T^*\varphi = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 (A_{ij}\varphi)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k b_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + c\varphi$$
- *Operatori lineari, autoaggiunti e definiti positivi:*
$T(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2) = k_1 T\varphi_1 + k_2 T\varphi_2$, $T^* = T$, $<\varphi, T\varphi> > 0 \ \forall \varphi \neq 0$
ad esempio $A=-I$, $b=0$, $c>0$
- *Simmetrizzazione possibile tramite trasf. di Gauss ma:*
  - *Peggiora il condizionamento*
  - *Aumenta l'ordine di derivazione*

Formulazioni variazionali

- *Caso con zero Dirichlet BC:*
  $T\varphi=f$ *in* Ω, *con* $\varphi=0$ *su* $\partial\Omega$
- *Metodo di Ritz: T lineare, autoagg. e pos. def.:*
  - *min* $<e,r>$ *con* $r=T\varphi-f$, $e=\varphi-\varphi_v=\varphi-T^{-1}f$
  - $G=<e,r>=<e,Te>=<\varphi,T\varphi>-2<\varphi,f>+<\varphi_v,T\varphi_v>$
  - *Espansione e sistema lineare:*
    $$\varphi(x)=\Sigma_\kappa \phi_\kappa u_\kappa(x):\ \partial G/\partial\phi_\iota=0 \Rightarrow \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\phi}=\underline{b},\ \begin{cases} A_{ik}=<u_i,Tu_k> \\ b_i=<u_i,f> \end{cases}$$
  - *Risultato analogo via derivate di Gateau*
- *Metodo dei residui pesati:*
  - $<w,r>=0,\ \forall w \Leftrightarrow <w,T\varphi>=<w,f>,\ \forall w$
  - *Scelta delle funzioni di base e di peso: collocazione* ($w=\delta$), *momenti (w polinomiali), Galerkin* ($w_k=u_k$)

Formulazioni deboli

- *Funzioni di peso w_i ed u_i non necessariamente appartenenti allo stesso spazio funzionale*
- *Metodo di Galerkin equivalente al metodo di Ritz per operatori lineari, autoagg. e pos. def.:*
  - *w_i ed u_i appartengono allo stesso spazio funzionale*
  - *possono essere rilassate le proprietà di continuità e derivabilità tramite integrazione per parti*
  - *es. problema di Poisson: minimizz. di* $\int_\Omega [\nabla\varphi - \nabla\varphi_v]^2 d\Omega$
- *Negli altri casi:*
  - *BC Dirichlet non nulle $\rightarrow$ differente espansione*
  - *Altre BC $\rightarrow$ dipende dall'operatore*
  - *Operatori non autoagg. $\rightarrow$ trasf. di Gauss o residui pesati*
  - *Operatori non lineari $\rightarrow$ residui pesati + metodi iterativi*