Lezione n. 8

Metodo degli elementi finiti

(problemi 3D, edge elements, trattamento di domini non limitati, transitori, problemi agli autovalori)

Trattamento di domini non limitati

- Troncamento
- Cambio di variabili
- Accoppiamento con metodi integrali
- Elementi infiniti
- …

Elementi curvi e del secondo ordine

- Trattamento di domini curvi
- Maggiore precisione
- Maggiore occupazione di memoria
- Integrazione numerica necessaria

Soluzione di problemi parabolici nel dominio del tempo

- Discretizzazione spaziale FEM

- Discretizzazione temporale FD:
  – Schemi espliciti
  – Schemi impliciti

Caratteristiche intrinseche dei problemi 3D

- Terza coordinata spaziale:
  - Elementi tetraedrici, prismatici, esaedrici, etc.
- Incognite vettoriali:
  - un solo potenziale scalare non basta nel caso generale
  - 3 incognite scalari (e 3 problemi scalari accoppiati)
  - Funzioni di base vettoriali
- Trattamento delle discontinuità:
  - Funzioni polidrome
  - Potenziali vettori
  - Elementi non conformi

Cavità risonanti

- *Analogo continuo di un circuito di pure reattanze*
- *Equazioni nel caso non dissipativo*
- *Formulazione in termini di* **E**

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \quad in \;\; \Omega$$

$$n \times \mathbf{E} = 0 \quad su \quad \partial\Omega$$

- *Formulazione agli elementi finiti*

$$\int_\Omega \mathbf{N}_i \cdot \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \, d\Omega = \omega^2 \int_\Omega \mathbf{N}_i \cdot \varepsilon \mathbf{E} \, d\Omega$$

- *Problema agli autovalori*

$$Av = \omega^2 Bv$$

- *Problema dei modi spuri (eliminato approssimando correttamente campi irrotaz.)*

Nodal shape functions for scalar fields

The nodal function N_k associated to the k-th node is continuous, piecewise polynomial with:

$$N_k(\mathbf{r}_k) = 1$$

$$N_k(\mathbf{r}_m) = 0, \quad k \neq m$$

$$\sum_{j=1,NP} N_j(\mathbf{r}) = 1, \quad \mathbf{r} \in V_d$$

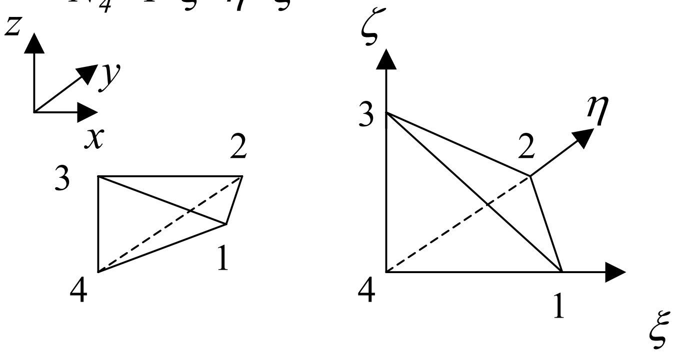
$$x = \sum_{k \in I_I} N_k(\xi,\eta,\zeta)\, x_k$$

$$y = \sum_{k \in I_I} N_k(\xi,\eta,\zeta)\, y_k$$

$$z = \sum_{k \in I_I} N_k(\xi,\eta,\zeta)\, z_k$$

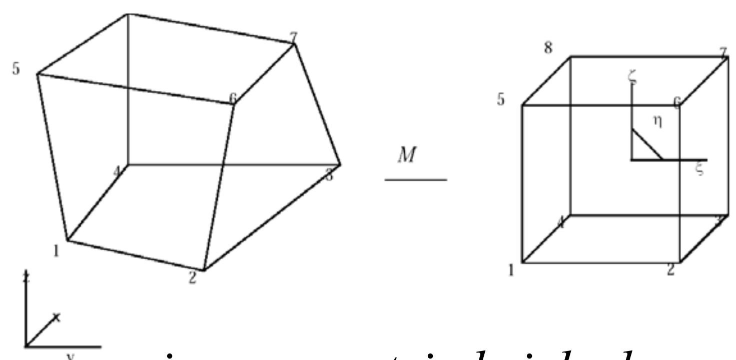
$N_1=\xi,\ N_2=\eta,\ N_3=\zeta$

$N_4=1-\xi-\eta-\zeta$



isoparametric tetrahedron

$$N_k(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_k)(1+\eta\eta_k)(1+\zeta\zeta_k)$$



isoparametric brick element

Edge element based shape functions for vector fields

- The line integral of $\mathbf{N}_e$ along the edge e (from node i to node j) is one:

$$\int_{\{i,j\}} \mathbf{N}_e \cdot d\mathbf{l} = 1 \qquad \text{(A.3.8)}$$

- The line integral of $\mathbf{N}_e$ is zero along any other edge $\{l,k\} \neq \{i,j\}$ and $\{k,l\} \neq \{i,j\}$:

$$\int_{\{l,k\}} \mathbf{N}_e \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \text{(A.3.9)}$$

- The tangential components of $\mathbf{N}_e$ are continuous across the face of adjacent elements since the scalar functions N_k are continuous.
- The normal components of $\mathbf{N}_e$ are not necessarily continuous.
- $\mathbf{N}_e$ and ∇N_k belong to the same functional space: the gradient of a nodal shape function is given by a linear combination of the edge shape functions having in common that node:

$$\nabla N_k = \sum_{e=1,E} G_{ek} \mathbf{N}_e \qquad \text{(A.3.10)}$$

where E is the number of edges of the mesh and $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$ is the $E \times NP$ incidence matrix defined by:

$$G_{em} = \begin{cases} +1 \text{ if } e = \{i,j\} \text{ and } m = j \\ -1 \text{ if } e = \{i,j\} \text{ and } m = i \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

In a tetrahedron

$e = \{1,2\} \Rightarrow$

$\mathbf{N}_e = N_1 \nabla N_2 - N_2 \nabla N_1$